

La physique quantique
(Tome I)

La connaissance est le patrimoine de l'humanité, donc
chaque être humain peut l'utiliser librement mais il a aussi
le devoir de le protéger, partager, améliorer.

Morphocode CODE

Copyright

Titre: La physique quantique (Tome I)

Auteur: Morphocode CODE

Site web: <https://fan2cube.fr>

Version: 18.9-22.12.17

© Sept-2018, Morphocode CODE

ISBN : 979-8-4476-8638-3

ALL RIGHTS RESERVED. This book is protected by
international copyright laws. Any unauthorized use of
this book to earn money is strictly prohibited, only
use for personal purposes is permitted.

Préface

La physique quantique est réputée difficile, incompréhensible, étrange, n'importe quoi, délirante etc !!! ...

Si je dois comparer entre la relativité (générale) et la physique quantique je dirais :

→ mathématiquement la relativité est plus difficile que la physique quantique.

→ conceptuellement la physique quantique est plus difficile que la relativité.

En effet la relativité utilise des objets mathématiques très compliqués pour d'écrire la théorie : les tenseurs, l'espace-temps

Tandis que la physique quantique n'utilise que des objets très simple en mathématique : les vecteurs, l'espace vectoriel !

Mais les concepts qu'introduit par la PQ (Physique Quantique) sont complètement différents de nos concepts habituels voir même bizarre, contraire à nos sens !!....

La difficulté provient aussi par le manque de vocabulaires, ou les vocabulaires mal adoptés qui donnent parfois le contre sens de la théorie par ex:

- La dualité "onde-corpusculaire" (→ mot contradiction en elle-même → incompréhensif)

- La fonction "d'onde" → vocabulaire mal adopté, car il n'y a aucune onde physique qui se propage !

- Le principe d'incertitude (→ une théorie non précise)

etc

En plus de ça, les vulgarisations, à force de simplifier on raconte n'importe quoi et parfois même le contraire de ce que dit la théorie bref c'est la pagaille total !!!!

Pourquoi la PQ est incompréhensible et bizarre ? ...

C'est parce que pour une personne standard , normal voici ce que nous croyons, pensons ... :

- Le monde existe indépendamment de nous.

- Dans ce monde, il y a des objets, ces objets existent indépendamment de nous : la lune existe que le bébé soit conscience ou non, que l'on la regarde ou non.

- Entre ces objets il y a des lois indépendamment de nous

- Les objets ont des propriétés que l'on sache ou non.

- Le monde est déterministe : si on connaît les conditions initiales à $t=0$, on peut prévenir exactement ce qui se passera à l'instant plus tard $t>0$. On sait d'où on vient, on sait d'où on arrive.

- Le monde est causal : tout événement a une cause

- Une théorie physique décrit les objets c'est-à-dire les propriétés des objets, et les lois qui relient ces objets

etc

Eh bien en PQ tout ça à la poubelle !!!

J'avoue que ma 1er rencontre avec la PQ m'a vraiment perturbé, secoué, ... j'étais révolté j'ai dit : c'est n'importe quoi ... à chaque raisonnement du côté de la PQ, j'ai un contre-raisonnement du coup la PQ m'a pas du tout convaincu.

Il me fallait plus un an pour habituer un peu le "style" quantique.

La 1er question qu'on se pose c'est à quel niveau d'étude qu'on peut aborder la PQ ? Je dirais il suffit d'avoir le niveau BAC+2, car la PQ utilise l'algèbre linéaire et un peu d'analyse c'est tout. Mais le plus gros morceau c'est comprendre les concepts que la PQ introduit.

Une bonne stratégie pour comprendre la PQ c'est "ruser" l'esprit ! il faut "contourner" l'esprit : trouver des exemples, des arguments pour montrer qu'on a 2 choix : le "choix classique" ou le "choix quantique" ces 2 choix sont arbitraires, et il n'y a aucune raison de choisir le choix 1 plutôt que le choix 2 !!! Autrement dit il faut s'entraîner l'esprit pour qu'il accepte ce que dit la PQ !! . Je vais prendre un exemple.

On a un disque (qui peut tourner) à l'intérieur d'une boîte fermée et lorsqu'on ouvre la boîte on voit le disque immobile :

→A: La physique classique dit que le disque est immobile avant l'ouverture, et effectivement vous voyez le disque immobile sous vos yeux lors de l'ouverture.

→B: La PQ dit que le disque n'est pas immobile avant l'ouverture il tourne !! c'est l'ouverture qui arrête brutalement le disque, le rend immobile !!

Or ceux qui sont pour le cas A ne peuvent pas démontrer que le disque est immobile avant l'ouverture, comme ceux qui sont pour le cas B ne peuvent pas non plus démontrer que le disque tourne avant l'ouverture donc c'est un choix de camp, le camp A ou le camp B, qui est totalement arbitraire.

Cet exemple nous montre que : il n'y a aucune raison d'accepter les concepts de la physique classiques donc ça nous laisse facilement accepter les concepts de la PQ.

De tout façon personne ne comprend vraiment la PQ et puis c'est aussi normal car on est macroscopique, vivant dans un monde macroscopique, subit les lois macroscopique Alors que la PQ décrit le monde microscopique et c'est normal que les lois du monde microscopique sont différentes avec les lois du monde macroscopique .

1 L'ÉTRANGETÉ DES OBJETS QUANTIQUES

Rien ne vaut qu'un veau qui ne vaut rien !

Morphocode

1.1 L'EXPÉRIENCE DES FENTES DE YOUNG

Young1

Une source S envoie des électrons, un par un sur une plaque P percée de deux fentes A et B dont l'une B est fermée. La fig1 montre le résultat de l'expérience, ce qui est tout à fait normal.

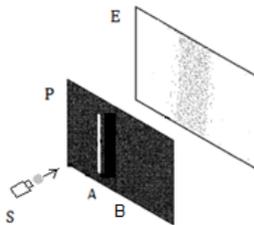


fig1

Young2

On envoie des électrons, aussi un par un sur la plaque P mais cette fois-ci la fente B est ouverte. On attend de voir :

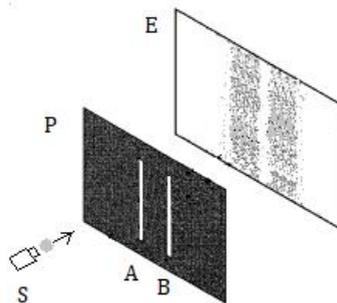


fig2

Mais le résultat de l'expérience est :

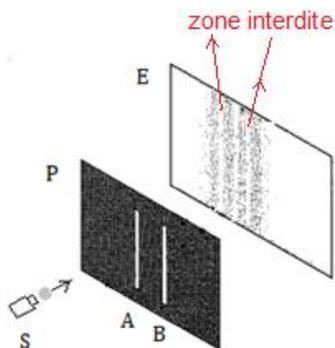


fig2a

Vous pouvez voir l'animation de l'expérience ici

https://fan2cube.fr/livre/young_quantique.html

Ce qui est vraiment étrange et surprenant, on a des franges d'interférence !! l'électron s'interfère lui-même !!!

Comment un électron qui passe par la fente A sait que la fente B reste ouverte pour ne pas s'installer dans la zone interdite ? alors que normalement il peut se placer dans cette zone (expérience Young1) ?

Young3

On envoie des électrons, un par un sur la plaque P et deux fentes A et B restent ouvertes. Un dispositif D (placé après la plaque P) qui permet de savoir quelle fente passe l'électron. Et on ne voit que 2 franges :

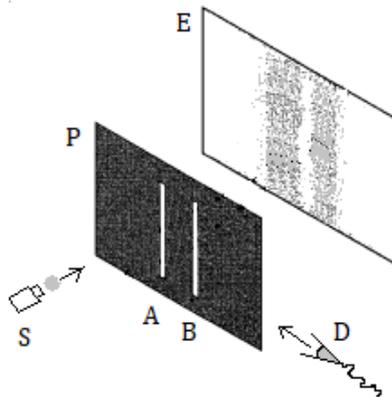


fig3

Il n'y a plus d'interférence !!!

C'est curieux, le fait d'observer, l'électron change de comportement, il ne s'interfère plus !

Les expériences Young² et Young³ sont vraiment étranges !! En effet

▫ Pour l'expérience Young² : l'électron qui traverse la fente A, comment sait-il que la fente B est ouverte pour s'interférer à lui-même ?

Même question pour l'électron qui traverse la fente B, comment sait-il que la fente A est ouverte pour s'interférer à lui-même ?

▫ Pour l'expérience Young³ : l'électron qui traverse la fente A (ou B) comment sait-il qu'on est entrain de l'observer pour ne pas s'interférer à lui-même ?

1.2 L'INTERFÉROMÈTRE DE MACH ZEHNDER

MZ1

Une source envoie des photons, un par un, sur un séparateur (Beam Splitter) S_1 qui soit transmet T soit réfléchit R le photon . Quand le photon arrive sur un miroir il réfléchit totalement. On place deux détecteurs D_1 et D_2 comme indique la fig4

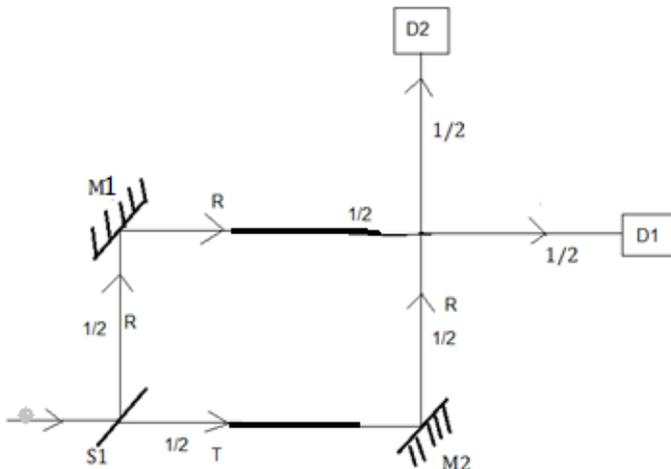


fig4

Le photon arrive en S_1 il a $1/2$ de chance d'être transmis et $1/2$ d'être réfléchi, les miroirs M_1 et M_2 ne changent rien sur la probabilité on détecte donc $1/2$ dans D_1 et $1/2$ dans D_2 . Ce qui est tout à fait normal.

MZ2

Modifions légèrement le dispositif, on place un deuxième séparateur S_2 (les chemins $S_1M_1S_2D_1$, $S_1M_2S_2D_2$ sont égaux $S_1M_1S_2D_1 = S_1M_2S_2D_2$) comme indique la fig5

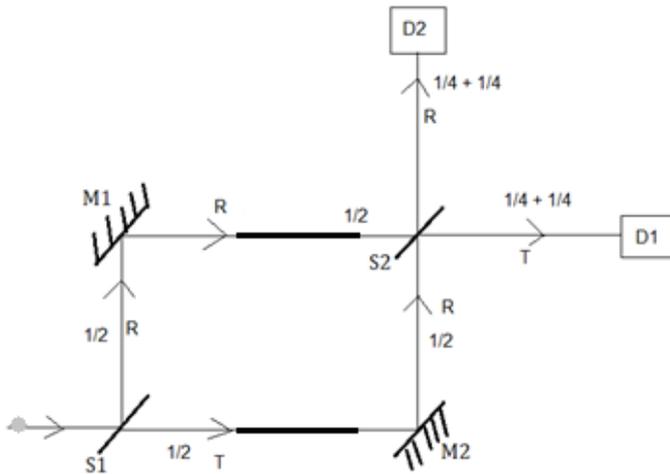


fig5

Comme dans le cas MZ1, mais quand le photon arrive en S_2 il a $1/4$ de chance d'être transmis et $1/4$ de chance de réfléchir, donc on détecte en $D_1 = 1/4 + 1/4 = 1/2$ de même pour $D_2 = 1/4 + 1/4 = 1/2$

Mais ce n'est pas le résultat de l'expérience, le résultat de l'expérience est:

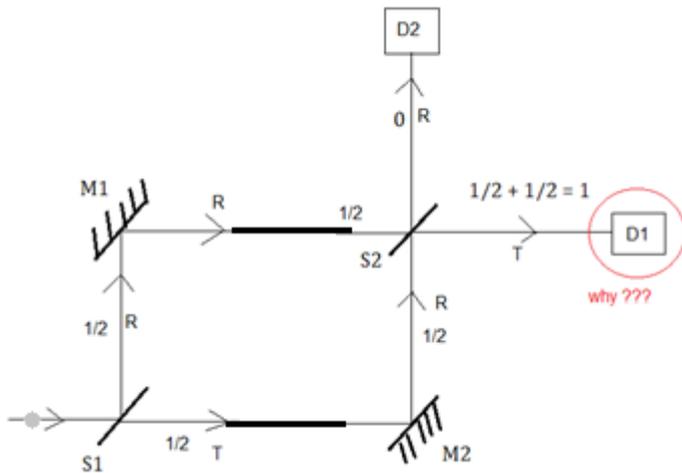


fig6

On les trouve tous dans D_1 et zéro 0 photon dans D_2 !!!

bizarre non ???

Pourquoi tous dans D_1 et rien dans D_2 ? et puis pourquoi pas tous dans D_2 et rien dans D_1 ??? bref c'est bizarre !!!

Modifions encore le dispositif

MZ3

On va allonger le chemin S_1M_1 d'une longueur $0 \leq \theta \leq 2\pi$ par le dispositif de prolongement " \hat{u} " comme indique la fig 7

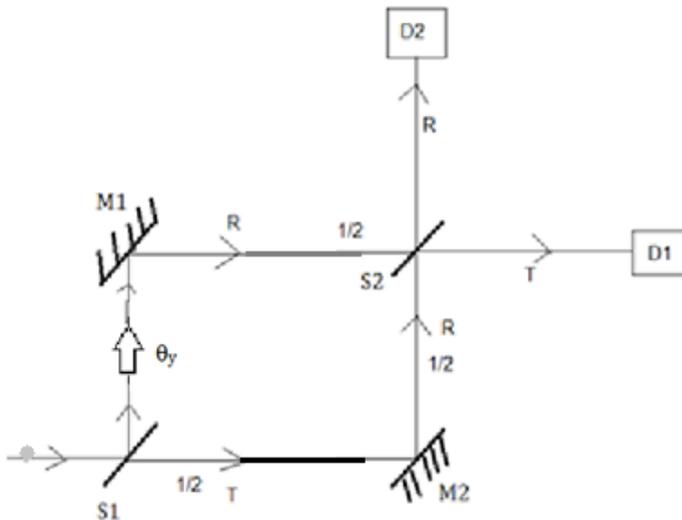


fig7

Quand $\theta=0$, zéro photon dans D_2 (tous dans D_1) quand on augmente θ , quelques photons vont dans D_2 , plus on augmente θ , plus on trouve des photons dans D_2 , pour un $\theta=\pi$, tous les photons se trouvent dans D_2 et zéro 0 dans D_1 , et si on continue à augmenter θ , l'effet inverse se produit (un peu dans D_1 ...) à $\theta=2\pi$ tous les photons sont dans D_1 et zéro 0 dans D_2 ! et le cycle recommence ...

C'est vraiment étrange, en effet comment le photon qui prend le chemin $S_1M_2S_2$ sait-il que le chemin $S_1M_1S_2$ a été modifié pour décider d'aller en D_2 , alors qu'il va systématiquement en D_1 (expérience MZ2) ??

Voilà l'étrangeté des objets quantiques, je vous laisse réfléchir... chacun doit trouver son explication, son

propre stratagème pour deviner le résultat de l'expérience , avant de les vérifier par les calculs.

En physique classique on divise les objets en deux catégories:

Corpusculaire .

ou

Onde .

En physique quantique , pour nous, une particule quantique est un objet corpusculaire ponctuel pouvant s'auto-interférer

2 L'ESPACE DE HILBERT

2.1 L'ESPACE DE HILBERT

Le formalisme mathématique de la physique quantique est l'espace de Hilbert complet et séparable, de dimension finie (n), dénombrable (\mathbb{N}) ou continue (\mathbb{R}), en gros c'est l'algèbre linéaire, et un peu d'analyse (l'espace normé, complet, intégrale ...) donc rien de compliqué il suffit d'avoir le niveau BAC+2 et ça marche. Mais pour comprendre les concepts quantiques c'est autre chose !!!

Forme hermitienne :

Soit \mathcal{H} un \mathbb{C} -espace vectoriel . Une forme hermitienne notée $\langle u|v\rangle$ sur \mathcal{H} est:

1. Anti-linéaire à gauche

$$\langle (a_1u_1+a_2u_2)|v\rangle = a_1^*\langle u_1|v\rangle + a_2^*\langle u_2|v\rangle$$

$a^* = \bar{a}$ = complexe conjugué de a

2. Linéaire à droite

$$\langle u|(a_1v_1+a_2v_2)\rangle = a_1\langle u|v_1\rangle + a_2\langle u|v_2\rangle$$

3. Symétrie hermitienne

$$\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$$

Définie

$$\langle u|u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Positive

$$\langle u|u \rangle \geq 0 \quad \forall u$$

L'espace de Hilbert :

Un espace de Hilbert \mathcal{H} c'est un \mathbb{C} -espace vectoriel muni une forme hermitienne définie positive, autrement dit c'est un \mathbb{C} -esv vérifiant les 5 propriétés ci-dessous:

1. Anti-linéaire à gauche

$$\langle (a_1 u_1 + a_2 u_2) | v \rangle = a_1^* \langle u_1 | v \rangle + a_2^* \langle u_2 | v \rangle$$

2. Linéaire à droite

$$\langle u | (a_1 v_1 + a_2 v_2) \rangle = a_1 \langle u | v_1 \rangle + a_2 \langle u | v_2 \rangle$$

3. Symétrie hermitienne

$$\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^*$$

4. Définie

$$\langle u|u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

5. Positive

$$\langle u|u \rangle \geq 0 \quad \forall u$$

La norme de \mathcal{H}

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

$$\|u\|^2 = \langle u | u \rangle$$

Dans cet espace on a une base $\{e_i\}_{i \in I}$ ($I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}^*$) définie par

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

et donc chaque vecteur u s'écrit

$$u = \sum_{i \in I} u_i e_i \text{ ou simplement } u = \sum_i u_i e_i$$

or

$$\langle e_i | u \rangle = \langle e_i | \sum_j u_j e_j \rangle$$

comme c'est linéaire à droite on a

$$\langle e_i | u \rangle = \sum_j u_j \langle e_i | e_j \rangle = u_i$$

D'où le coefficient $u_i = \langle e_i | u \rangle$

Soient

$$u = \sum_i u_i e_i$$

et

$$v = \sum_j v_j e_j$$

$$\langle u|v \rangle = \langle \sum_i u_i e_i | \sum_j v_j e_j \rangle$$

$$\langle u|v \rangle = \sum_{i,j} u_i^* v_j \langle e_i | e_j \rangle$$

$$\langle u|v \rangle = \sum_i u_i^* v_i$$

Vecteurs orthogonaux

$$\langle u|v \rangle = 0$$

On dit que u, v sont orthogonaux et

$$\langle u|u \rangle = 1 \text{ (ou } \|u\|^2=1)$$

on dit que u est normé.

Exemples d'espaces de Hilbert

$$1. \mathbb{C}^n \rightarrow \langle u|v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i$$

$$2. \ell^2 = \{u_n \in \mathbb{C} / \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty\}$$

$$\rightarrow \langle u | v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^* v_n$$

$$3. L^2(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

$$\rightarrow \langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx$$

Complet :

Un espace complet c'est un espace où toute suite de Cauchy converge.

Soit u_n une suite d'éléments de \mathcal{H}

si $\forall p, q \ || u_p - u_q || \rightarrow 0$ alors la suite u_n est convergente.

Si $\forall \varepsilon \exists k / \forall p, q > k \Rightarrow || u_p - u_q || < \varepsilon$ (Cauchy)

alors u_n est convergente.

Séparable :

Il existe une suite a_n de \mathcal{H} telle que

$$\forall u \in \mathcal{H} \ \forall \varepsilon > 0, \exists a_k \text{ tel que } ||u - a_k|| < \varepsilon$$

ou une condition plus fort :

Il existe une partie E de \mathcal{H} qui est dense dans \mathcal{H} , autrement dit tout élément de u de \mathcal{H} est limite d'une suite de E , $\exists u_n \in E$

$$u_n \rightarrow u \text{ qd } n \rightarrow \infty$$

La physique quantique travaille donc dans un espace de Hilbert complet, séparable et de dimension finie (n), dénombrable (\mathbb{N}) ou continue (\mathbb{R}).

Autrement dit séparable=il existe une base finie, infinie dénombrable ou infinie continue.

2.2 L'OPÉRATEUR ADJOINT

Un opérateur A est simplement une application linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{H} .

A = opérateur, u =vecteur

$Au \rightarrow$ lire "A appliqué à u"

L'exponentiel d'un opérateur A

$$e^A \stackrel{\text{def}}{=} I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Somme de deux opérateurs

$$(A + B)u \stackrel{\text{def}}{=} Au + Bu$$

Produit de deux opérateurs AB

$$(AB)u \stackrel{\text{def}}{=} A(Bu)$$

exemple

$$A = \partial_x, B = x$$

$$AB = \partial_x x$$

$$(\partial_x x)u \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x(xu) = u + x\partial_x u = (1 + x\partial_x)u$$

d'où

$$\partial_{xx} = (1 + x\partial_x)$$

Note : il y a une différence entre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial x} f$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = la dérivée partielle de f

$\frac{\partial}{\partial x} f$ = produit de deux opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et f !!

ex:

pour

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin x$$

ça donne

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \sin x\right)u = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x u) = (\cos x)u + \sin x \frac{\partial u}{\partial x}$$

Définition l'opérateur adjoint :

$$A^\dagger = {}^t(A^*) = ({}^t A)^* \quad (A^\dagger = \text{lire } A \text{ croix})$$

ou encore

$$\langle Au | v \rangle = \langle u | A^\dagger v \rangle$$

Propriétés des opérateurs adjoints

1. $A^{\dagger\dagger} = A$
2. $(A + B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$
3. $(aA)^{\dagger} = a^*A^{\dagger}$
4. $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$
5. $(A^{\dagger})^{-1} = (A^{-1})^{\dagger}$
6. $A^{\dagger} = {}^tA^*$ (transposé de la matrice conjuguée)

L'opérateur autoadjoint ou hermitien

$$A^{\dagger} = A$$

Définition : un observable est un opérateur autoadjoint.

Définition opérateur unitaire

$$A^{\dagger}A = AA^{\dagger} = I$$

ou encore

$$A^{\dagger} = A^{-1}$$

Propriétés:

1. $\langle Au | Av \rangle = \langle u | v \rangle$, conserve le produit scalaire
2. $\|Au\| = \|u\|$, conserve la norme
3. Les valeurs propres sont de module 1

4. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux

5. Si A est hermitien alors e^{iA} est unitaire

Théorème de Wigner (admis)

Soit A un opérateur, on pose

$$u' = Au$$

Si $|\langle u'|v' \rangle| = |\langle u|v \rangle|$ alors A est unitaire ou anti-unitaire

$$\rightarrow \text{unitaire : } \langle u'|v' \rangle = \langle u|v \rangle$$

$$\rightarrow \text{anti-unitaire : } \langle u'|v' \rangle = \langle u|v \rangle^*$$

Valeur propre, vecteur propre

Si on a

$$Au = au$$

on dit que u est un vecteur propre de A et que a est la valeur propre associée à u .

L'ensemble des valeurs propres de A , s'appelle le spectre de A , et l'espace vectoriel E_a des vecteurs propres associés à a s'appelle espace propre de a . Si $\dim E_a = 1$ on dit que la valeur propre a est non-dégénérée, donc une valeur propre a est dite dégénérée si:

$$\left. \begin{array}{l} Au = au \\ Av = av \end{array} \right\} \Rightarrow \{u, v\} \text{ libre}$$

Les valeurs propres d'opérateurs autoadjoints sont réelles.

Commutateur

Soient A, B deux opérateurs, le commutateur A, B est défini par

$$[A,B] = AB - BA$$

exemple

$$[x, \partial_x] = x\partial_x - \partial_x x = x\partial_x - (1 + x\partial_x) = -1$$

Si $[A,B] = 0$ on dit que A, B commute.

Propriété

$$[A,BC] = B[A,C] + [A,B]C$$

Démonstration

$$B[A,C] = B(AC - CA) = BAC - BCA$$

$$[A,B]C = (AB - BA)C = ABC - BAC$$

$$B[A,C] + [A,B]C = BAC - BCA + ABC - BAC = ABC - BCA = [A,BC]$$

2.3 PRODUIT TENSORIEL DE DEUX ESPACES DE HILBERT

Soient E et F deux espace de Hilbert de base e_i (pour E) et f_j (pour F)

Théorème : On peut construire un troisième espace de Hilbert \mathcal{H} à partir de E et F que l'on notera $\mathcal{H}=E\otimes F$ et que la famille

$\{e_i\otimes f_j\}_{i,j}$ forme une base de \mathcal{H}

On dira que $\mathcal{H}=E\otimes F$ est le produit tensoriel de E et F

Le produit tensoriel est distributif mais non commutatif.

$\psi\in\mathcal{H}$

$$\psi = \sum_{i,j} \psi_{ij} (e_i\otimes f_j)$$

Lorsque ψ est de la forme $\psi = \chi\otimes\Phi$ on dit que ψ est factorisable, séparable ou décomposable sinon on dit qu'il n'est pas factorisable, non séparable ou intriqué.

$$\chi = \sum_i \chi_i e_i$$

$$\Phi = \sum_j \Phi_j f_j$$

$$\chi\otimes\Phi = \sum_i \chi_i e_i \otimes \sum_j \Phi_j f_j$$

$$\psi = \chi\otimes\Phi = \sum_{i,j} \chi_i \Phi_j (e_i \otimes f_j)$$

si $\psi_{ij} = \chi_i \Phi_j$ alors ψ est factorisable.

Exemple : On prend E et F deux espaces de Hilbert de dimension 2:

$$\chi = \chi_1 e_1 + \chi_2 e_2$$

$$\Phi = \Phi_1 f_1 + \Phi_2 f_2$$

$$\begin{aligned} \chi \otimes \Phi &= (\chi_1 e_1 + \chi_2 e_2) \otimes (\Phi_1 f_1 + \Phi_2 f_2) \\ &= \chi_1 \Phi_1 (e_1 \otimes f_1) + \chi_1 \Phi_2 (e_1 \otimes f_2) + \chi_2 \Phi_1 (e_2 \otimes f_1) + \chi_2 \Phi_2 (e_2 \otimes f_2) \end{aligned}$$

L'état

$$\psi = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$$

est un état intriqué, en effet si ψ est séparable $\psi = \chi \otimes \Phi$ on doit avoir :

$$\begin{cases} \chi_1 \Phi_1 = 1 \\ \chi_2 \Phi_2 = 1 \\ \chi_1 \Phi_2 = 0 \\ \chi_2 \Phi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\chi_1 \Phi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \chi_1 = 0 \Rightarrow \chi_1 \Phi_1 = 1 \text{ contradiction}$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = 0 \Rightarrow \chi_2 \Phi_2 = 1 \text{ contradiction}$$

donc c' est impossible.

Le produit scalaire sur $\mathcal{H} = E \otimes F$

e_i, e_u base de E, f_j, f_v base de F,

$$\langle e_i \otimes f_j | e_u \otimes f_v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle e_i | e_u \rangle \langle f_j | f_v \rangle = \delta_{iu} \delta_{jv}$$

$a, a' \in E$ et $b, b' \in F$

$$\langle a \otimes b | a' \otimes b' \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle a | a' \rangle \langle b | b' \rangle$$

Opérateur sur $\mathcal{H}=E\otimes F$

Soient A un opérateur défini sur E, et B un opérateur défini sur F, alors par définition l'opérateur $A\otimes B$ défini sur $\mathcal{H}=E\otimes F$ est:

$$A\otimes B (e_i\otimes f_j) \stackrel{\text{def}}{=} A e_i \otimes B f_j$$

autrement dit

$$A\otimes B (u\otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} Au \otimes Bv$$

Si on a A tout seul, on prend $A\otimes I$ c'est-à-dire

$$A\otimes I (u\otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} Au \otimes v .$$

2.4 NOTATION DE DIRAC KET ET BRA

Dirac a inventé une notation très pratique en physique quantique

Un vecteur u traditionnellement on note \vec{u} mais Dirac le note $|u\rangle$.

On peut considérer $|\cdot\rangle$ comme une boîte qu'on peut mettre n'importe quoi dedans ! ex:

$$|x\rangle, |\uparrow\rangle, |\text{rouge}\rangle, |\surd\rangle, |\psi(x,t)\rangle, |+\rangle, |-\rangle, |1\rangle, \text{etc ...}$$

C'est donc très pratique.

le vecteur $|u\rangle$ se nomme le ket u

exemple

$$\alpha u = \alpha |u\rangle$$

$$Au = A|u\rangle$$

à chaque ket $|u\rangle$ on associe une forme linéaire noté $\langle u|$ et nommé "bra" de $|u\rangle$ définie par:

$$\langle u|(|v\rangle) = \langle u|v\rangle \text{ (la produit scalaire } |u\rangle, |v\rangle)$$

Le produit tensoriel de deux vecteurs sera parfois noté

$$u \otimes v = |u\rangle \otimes |v\rangle = |uv\rangle = |u\rangle |v\rangle$$

2.5 OPÉRATIONS SUR LES KETS ET LES BRAS

Propriété 1

$$|\xi\rangle = \alpha |u\rangle + \beta |v\rangle$$

$$\langle \xi| = \alpha^* \langle u| + \beta^* \langle v|$$

Propriété 2

$$|v\rangle = A|u\rangle$$

$$\langle v| = \langle u| A^\dagger$$

Propriété 3

$$(\langle b|x\rangle) |u\rangle = |u\rangle \quad (\langle b|x\rangle) = (|u\rangle \langle b|) |x\rangle$$

le $|u\rangle \langle b|$ apparaît comme un opérateur et

$$(|u\rangle \langle b|)^\dagger = |b\rangle \langle u|$$

Propriété 4

$$A_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle$$

A_{ij} = les coefficients de la matrice A

3 LES DISTRIBUTIONS ET LES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

3.1 LES FONCTIONS À SUPPORT FERMÉ-BORNÉ

En physique quantique tôt ou tard vous allez rencontrer un mystérieux objet $\delta(x - u)$, on parle de fonction de Dirac en u , distribution de Dirac en u , impulsion de Dirac en u etc et l'explication n'est pas clair, illogique ... bref c'est la pagaille total

Et pour tant ce n'est pas si compliqué à expliquer

Le problème provient le manque de vocabulaires, l'identification sauvage des objets mathématiques

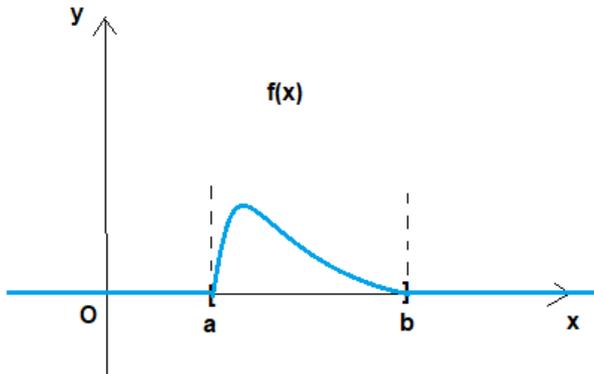
Mais ne vous en faites pas vous allez bien comprendre ce que c'est cet objet $\delta(x - u)$.

Soit \mathbb{D} l'ensemble des fonctions f ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

1. $f \in \mathbb{D}$ de classe C^∞ ; abuse de notation on note $f(x)$ pour f .
2. $f = f(x) \in \mathbb{D}$ à support fermé-borné (compact), c'est-à-dire il existe un plus petit intervalle fermé-borné $[a, b]$ tel que

$x \notin [a, b]$ $f(x) = 0$, $f(x)$ est nulle en dehors d'un plus petit intervalle fermé-borné.



Et on munit sur \mathbb{D} une topologie pour pouvoir parler de la limite.

Définition : Une distribution $\tilde{\alpha}$ (de \mathbb{D}) est une forme linéaire continue sur \mathbb{D} .

$$\tilde{\alpha}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

$f \rightarrow \tilde{\alpha}(f)$ mais souvent on note $\langle f, \tilde{\alpha} \rangle = c$ c'est un nombre

→ Linéaire :

$$\forall f, g \in \mathbb{D}, \forall a, b \in \mathbb{C}$$

$$\tilde{\alpha}(af + bg) = a\tilde{\alpha}(f) + b\tilde{\alpha}(g)$$

→ $\tilde{\alpha}$ continue en f :

$\forall f_n \in \mathbb{D}$ une suite de fonctions de \mathbb{D} tend vers f , $f_n \rightarrow f$ quand n tend vers l'infini $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \quad ; \text{ (topologie de } \mathbb{D} \text{)}$$

dire que $\tilde{\alpha}$ est continue en f ça veut dire qu'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}(f_n) = \tilde{\alpha}(f) \quad ; \text{ (dans } \mathbb{C} \text{)}$$

L'ensemble des distributions de \mathbb{D} sera noté $\tilde{\mathbb{D}}$

$$\tilde{\alpha}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \rightarrow \langle f, \tilde{\alpha} \rangle = \text{un nombre}$$

Pour bien comprendre ce qui suit, on va introduit un nouveau concept, nouveau vocabulaire : "l'âme".

Observons la formule ci-dessous :

$$\langle f, \tilde{\alpha} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\alpha(x)dx$$

Dans cette écriture on a le vocabulaire suivant :

$$f=f(x) = \text{fonction}$$

$$\tilde{\alpha} = \text{distribution}$$

$$\alpha(x) = \text{l'âme}$$

On dit que la distribution $\tilde{\alpha}$ provient de l'âme $\alpha(x)$, ou à l'âme $\alpha(x)$ on associe la distribution $\tilde{\alpha}$.

Il faut bien remarquer que (en générale) l'âme $\alpha(x)$ n'est pas une fonction ni une distribution !!! et qu'il y a une grande différence entre $\tilde{\alpha}$ et $\alpha(x)$ mais on a $f=f(x)$.

Définition : $\varphi(x)$ est localement intégrable, signifie que $\varphi(x)$ est intégrable sur tout intervalle borné.

À toute fonction $\varphi(x)$ localement intégrable on associe une distribution notée $\tilde{\varphi}$ définie par :

$$\langle f, \tilde{\varphi} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

Ici, dans ce cas particulier l'âme $\varphi(x)$ est une fonction, de plus c'est une fonction localement intégrable

Il y a donc une différence entre $\varphi(x)$ =fonction et $\tilde{\varphi}$ =distribution.

Par ex la fonction $H(x)$ Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

qui est localement intégrable on lui associe alors une distribution \tilde{H} définie par:

$$\langle f, \tilde{H} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)H(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Ici encore l'âme $H(x)$ est une fonction.

Les fonctions localement intégrables $\varphi=\varphi(x)$, en quelque sorte peuvent être considérés comme des distributions (on confond $\tilde{\varphi}$ avec φ), c'est pourquoi on entend souvent dit que les distributions sont des fonctions "généralisées".

Nous verrons plus tard qu'il existe des distributions dont l'âme n'est pas une fonction !!

Définition : La dérivée $\tilde{\alpha}'$ de la distribution $\tilde{\alpha}$ est par définition :

$$\langle f, \tilde{\alpha}' \rangle = - \langle f', \tilde{\alpha} \rangle$$

exemple

$$\langle f, \tilde{H}' \rangle = - \langle f', \tilde{H} \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) H(x) dx = - \int_0^{+\infty} f'(x) dx$$

$$\langle f, \tilde{H}' \rangle = -[f(x)]_0^{+\infty} = f(0)$$

$f(+\infty) = 0$ car $f(x)$ est nulle en dehors d'un intervalle borné.

3.2 UNE SUITE DE FONCTIONS INTÉRESSANTES

Soient $u \in \mathbb{R}$ et une suite de fonction $\delta_n(x)$ définies par :

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - u| > \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} & \text{si } |x - u| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Cherchons la limite de $\delta_n(x)$ (en espérant que ça existe) quand $n \rightarrow +\infty$ et on la note $\delta_u(x)$, c'est-à-dire cherchons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x) = \delta_u(x) ??$$

on a:

$$\square \text{ pour } |x - u| > \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x) = 0 = \delta_u(x) ; x \neq u$$

$$\text{car pour } |x - u| \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty = \delta_u(u)$$

$\delta_u(u)$ car quand $n \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow u$

$$\text{car } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \int_{u-\frac{1}{n}}^{u+\frac{1}{n}} \delta_n(x) dx = \int_{u-\frac{1}{n}}^{u+\frac{1}{n}} \frac{n}{2} dx$$

$$= \frac{n}{2} [x]_{u-\frac{1}{n}}^{u+\frac{1}{n}} = \frac{n}{2} \left(u + \frac{1}{n} - \left(u - \frac{1}{n} \right) \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x) dx$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_u(x) dx$$

Donc la limite de $\delta_n(x)$ quand $n \rightarrow +\infty$ est un truc noté $\delta_u(x)$ qui vérifie les 3 propriétés suivantes :

$$\forall x, u \in \mathbb{R}$$

$$\delta_u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq u \\ +\infty & \text{si } x = u \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_u(x) dx = 1$$

Note : $\delta_u(x)$ n'est pas une fonction, en effet si $\delta_u(x)$ était une fonction on aurait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_u(x) dx = 0$$

Remarque : on a souvent rencontré ce genre de situation.
En effet, une suite de nombres rationnels qui tend vers une limite qui n'est pas un nombre rationnel !

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ici on a une suite de fonctions qui tend vers une limite qui n'est pas une fonction.

On va calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_u(x) dx = ??$$

avec $f(x) \in \mathbb{D}$

Allons-y :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n(x) dx &= \int_{u-\frac{1}{n}}^{u+\frac{1}{n}} f(x) \delta_n(x) dx = \int_{u-\frac{1}{n}}^{u+\frac{1}{n}} \frac{1}{2} f(x) dx \\ &= \frac{n}{2} \int_{u-\frac{1}{n}}^{u+\frac{1}{n}} f(x) dx \end{aligned}$$

en appliquant le théorème des valeurs moyennes

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c) \quad ; \text{ où } a < c < b$$

ça donne

$$= \frac{n}{2} \int_{u-\frac{1}{n}}^{u+\frac{1}{n}} f(x) dx = \frac{n}{2} \left(u + \frac{1}{n} - \left(u - \frac{1}{n} \right) \right) f(c_n)$$

$$\text{où } |c_n - u| < \frac{1}{n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(c_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n)$$

On démontre qu'on peut permuter la limite et l'intégrale donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n)$$

quand $n \rightarrow +\infty$, $c_n \rightarrow u$ et comme $f(x)$ est continue $f(c_n) \rightarrow f(u)$ quand $c_n \rightarrow u$ d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_u(x) dx = f(u)$$

Bien que $\delta_u(x)$ n'est pas une fonction, et que tout seul il ne sert à rien, par contre combiné avec $f(x) \in \mathbb{D}$ on peut calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_u(x) dx$$

et cette intégrale vaut précisément $f(u)$.

3.3 DISTRIBUTION DE DIRAC

Par définition la distribution de Dirac en $u \in \mathbb{R}$, $\tilde{\delta}_u$ est la distribution définie par :

$$\langle f, \tilde{\delta}_u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_u(x) dx$$

C'est la première fois qu'une distribution ne provient pas d'une fonction.

Vous voyez qu'il y a une grande différence entre $\tilde{\delta}_u$ (distribution) et $\delta_u(x)$ (l'âme, qui n'est pas une fonction) :

→ $\tilde{\delta}_u$ est une forme linéaire sur \mathbb{D} de variable $f \in \mathbb{D}$

→ alors que $\delta_u(x)$ (l'âme) on ne sait pas ce que c'est, c'est même pas une fonction !!

Bref c'est aucune important que $\delta_u(x)$ soit une fonction ou non, tout ce qu'on sait, c'est que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_u(x) dx = f(u)$$

nous donne un nombre: $f(u)$. On peut lire cette intégrale comme

$\delta_u(x)$ "appliqué" à $f(x)$ pour donner un nombre, et ceci de façon linéaire (et même continue)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [af(x) + bg(x)]\delta_u(x)dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_u(x)dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta_u(x)dx$$

$\delta_u(x)$ ressemble à une forme linéaire continue sur \mathbb{D}

C'est pourquoi nous les physiciens, on identifie $\tilde{\delta}_u$ à $\delta_u(x)$
c'est-à-dire $\tilde{\delta}_u = \delta_u(x)$

Donc on dit que $\delta_u(x)$ est la distribution de Dirac en u .

On oublie carrément $\tilde{\delta}_u$ et $\langle f, \tilde{\delta}_u \rangle$ et ne garder que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_u(x)dx = f(u)$$

avec

$\forall x, u \in \mathbb{R}$

$$\delta_u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq u \\ +\infty & \text{si } x = u \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_u(x)dx = 1$$

Mais cette identification pose énormément de problèmes
aux débutants:

▫ $\delta_u(x) \rightarrow$ suggère que la variable de la distribution est $x \in \mathbb{R}$, ce qui est étrange car la variable d'une distribution est une fonction $f(x) \in \mathbb{D}$

▣ on ne voit pas ce que vient faire $\tilde{\delta}_u$??

Bref, quand on écrit $\delta_u(x)$ il faut toujours penser à $\tilde{\delta}_u$ ou penser à

$\delta_u(x)(f) \rightarrow \delta_u(x)$ appliqué à f

en fait c'est simplement des notations si on note

$$\delta_u(x) = \delta_u^x = \delta_{u,x}$$

on verra que f est la variable et non x

$$\delta_u(x)(f) = \delta_u^x(f) = \delta_{u,x}(f)$$

mais dans ce cas l'intégrale devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_u(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_u^x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_{u,x} dx$$

on ne voit pas la variable d'intégration de δ_u , à mon avis la meilleure notation est $\delta_{u,x}$ (extension du symbole de Kronecker)

$$\forall x, u \in \mathbb{R}$$

$$\delta_{u,x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq u \\ +\infty & \text{si } x = u \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{u,x} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_{u,x} dx = f(u)$$

Mais traditionnellement on adopte la notation suivant

$\delta_u(x) = \delta(x - u)$; la variable x est en première, u la constante en deuxième.

Résumons tout :

On appelle la distribution de Dirac en $u \in \mathbb{R}$ (fixe, donné) et on la note $\delta(x - u)$ c'est un objet mathématique qui vérifie les propriétés suivantes:

$\forall x, u \in \mathbb{R}, \forall f(x) \in \mathbb{D}$

$$\delta(x - u) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq u \\ +\infty & \text{si } x = u \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - u) dx = f(u)$$

Quand $u=0$ on appelle $\delta(x)$ simplement la distribution de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

Ouuufff !!!!

Résumé :

1. On a un objet mathématique noté $\delta(x - u)$, nommé la distribution de Dirac en u , et il a la propriété suivante:

$\forall u \in \mathbb{R}, \forall f(x) \in \mathbb{D}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - u) dx = f(u)$$

Les propriétés de $\delta(x - u)$

1) $\delta(x - u)$ est paire

Calculons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(u - x)dx$$

en changeant $x=-u$ ça donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(u - x)dx = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(-u)\delta(-x + u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-u)\delta(u - x)du$$

posons $f(-u)=g(u)$, d'où

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-u)\delta(u - x)du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\delta(u - x)du = g(x)$$

$$g(x)=g(-u)=f(u)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(u - x)dx = f(u)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(u - x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - u)dx$$

comme ceci est vrai $\forall f(x)$ d'où

$$\delta(x - u) = \delta(u - x)$$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(\alpha x)dx$$

cas $\alpha > 0$

on pose $u = \alpha x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(\alpha x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{u}{\alpha}\right) \delta(u)du = \frac{1}{\alpha} f(0) = \frac{1}{\alpha} \delta(x)$$

cas $\alpha < 0$

on pose $u = -\alpha x$ avec $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(\alpha x)dx &= - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(-\frac{u}{\alpha}\right) \delta(-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(-\frac{u}{\alpha}\right) \delta(-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(-\frac{u}{\alpha}\right) \delta(u)du = \frac{1}{\alpha} f(0) = \frac{1}{\alpha} \delta(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-u)\delta(x-v)dx = \delta(u-v)$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} du = 2\pi\delta(x)$$

$$5) f(x)\delta(x - u) = f(u)\delta(x - u)$$

En particulier $u=0$ et $f(x)=x$

$$\forall x, x\delta(x) = 0$$

6) $\forall x, u$ l'équation

$$(x - u)T = 0$$

donne la solution

$$T = \delta(x - u)$$

7) La dérivée de $\delta'(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x)dx = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - u)f(x)dx = -f'(u)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(x - u)f(x)dx = (-1)^k f^{(k)}(u)$$

$$8) H' = \delta$$

La dérivée de la distribution de Heaviside est la distribution de Dirac.

3.4 POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Formule de Newton

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} x^n$$

Démonstration

On va démontrer cette formule à partir d'une formule de Newton:

$$|x| < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = k! (1-x)^{-k-1} =$$

$$= k!$$

$$+ k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k-1)(-k-2)(-k-3) \dots (-k-1-(n-1))}{n!} (-x)^n$$

$$= k! + k! \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(k+1)(k+2)(k+3) \dots (k+n)}{n!} (-x)^n$$

$$= k! + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!(k+1)(k+2)(k+3) \dots (k+n)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} x^n$$

Polynômes orthogonaux

On se donne une fonction $\mu(x)$ définie et intégrable sur $[a,b]$ avec $a < b$ et a, b peuvent être infinis ($a = -\infty$, $b = +\infty$) et on suppose que $\mu(x) \geq 0$ positive ou nulle, dans le cas d'un intervalle infini on suppose que tous les intégrales

$$\forall q \in \mathbb{N}, \int_a^b x^q \mu(x) dx \text{ convergent}$$

Pour $P(x)$, et $Q(x)$ deux polynômes, On note

$$\int_a^b P(x)Q(x)\mu(x)dx = \langle P|Q \rangle$$

Une famille de polynômes $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n est dite orthogonale (sur $[a,b]$ par rapport à $\mu(x)$) si

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)\mu(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ K_n & \text{si } m = n \end{cases}$$

K_n se nomme la constante de la normalisation et on écrira simplement

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)\mu(x)dx = K_n \delta_{mn}$$

Cette relation se nomme la relation de l'orthogonalité.

Il n'est pas évident de montrer qu'une famille est orthogonale et surtout de trouver la constante de la normalisation K_n .

Souvent pour montrer qu'une famille de polynômes est orthogonale et trouver la constante K_n on utilise la fonction génératrice de la famille.

Définition : Fonction génératrice des $P_n(x)$.

Soit $G(t,x)$ une fonction, on dit que $G(t,x)$ est la fonction génératrice des $P_n(x)$ si

$$G(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Théorème des fonctions génératrices

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $P_n(x)$ soient orthogonaux sur $[a,b]$ par rapport à $\mu(x)$ est que l'intégrale

$$I = \int_a^b G(t,x)G(t',x)\mu(x)dx$$

ne dépend que du produit tt' (pas de x).

En effet

$$I = \int_a^b G(t,x)G(t',x)\mu(x)dx =$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) t'^m \mu(x) dx \\
&= \int_a^b \sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(x) P_m(x) t^n t'^m \mu(x) dx \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_a^b P_n(x) P_m(x) t^n t'^m \mu(x) dx \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t'^m \int_a^b P_n(x) P_m(x) \mu(x) dx \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle P_n | P_m \rangle t^n t'^m
\end{aligned}$$

Si la famille $P_n(x)$ est orthogonale alors, I ne dépend que du produit tt' (pas de x)

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n | P_n \rangle (tt')^n = I(tt')$$

Réciproquement

Si

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (tt')^n$$

alors

$$c_n = K_n = \langle P_n | P_n \rangle$$

3.5 POLYNÔME D'HERMITE

Relation importante

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n f(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\right)$$

Démonstration

on a:

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} f(x) + e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} f(x)$$

$$-e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\right) = xf(x) - \frac{d}{dx} f(x)$$

soit

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right) f(x) = (-1) e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\right)$$

puis on recommence

$$u = \left(x - \frac{d}{dx}\right) f(x)$$

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right) u = (-1) e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} u\right)$$

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{d}{dx}\right)^2 f(x) \\ &= (-1) e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} (-1) e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = (-1)^2 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right)$$

on recommence encore

$$u = \left(x - \frac{d}{dx}\right) f(x)$$

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right)^2 u = (-1)^2 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} u \right)$$

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{d}{dx}\right)^3 f(x) \\ &= (-1)^2 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} (-1) e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right)^3 f(x) = (-1)^3 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^3}{dx^3} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right)$$

et on recommence encore, comme d'habitude à gauche, on remplace $f(x)$ par

$$f(x) \rightarrow \left(x - \frac{d}{dx}\right) f(x)$$

et à droite on remplace $f(x)$ par

$$f(x) \rightarrow (-1) e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right)$$

d'où

$$\left(x - \frac{d}{dx} \right)^4 f(x) = (-1)^4 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^4}{dx^4} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right)$$

.....

$$\left(x - \frac{d}{dx} \right)^n f(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right)$$

Polynôme d'Hermite

Par définition, le polynôme d'Hermite est:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Voici quelques exemples

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = -e^{x^2} \left((e^{-x^2})' \right) = -e^{x^2} (-2xe^{-x^2}) = 2x$$

$$\begin{aligned} H_2(x) &= e^{x^2} \left((-2xe^{-x^2})' \right) = e^{x^2} (-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}) \\ &= 4x^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(x) &= -e^{x^2} \left((-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2})' \right) \\ &= -e^{x^2} (4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}) \\ &= 8x^3 - 12x \end{aligned}$$

Note on a le coefficient dominant $2^n x^n$

Propriété 1

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

Démonstration

$$\left(x - \frac{d}{dx} \right)^n f(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right)$$

on utilise la formule avec

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\left(x - \frac{d}{dx} \right)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right)$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right)$$

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

C'est une autre définition des polynômes d'Hermite.

Propriété 2

$H_n(x)$ vérifie la relation de récurrence:

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$$

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

Propriété 3

$H_n(x)$ solution de l'équation différentielle:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, n \geq 0$$

Propriété 4 : de la normalisation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_k(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} n! 2^n \delta_{nk}$$

pour $k=n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} n! 2^n$$

Démonstration

Posons

$$A_n(x) = (-1)^n (e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

$$A_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} (e^{-x^2})^{(n-1)}$$

$$A'_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} (e^{-x^2})^{(n)} = -A_n(x)$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k A_n(x) dx, \text{ avec } k < n$$

on fait une intégrale par partie

$$\begin{cases} x^k \rightarrow kx^{k-1} \\ A'_{n-1}(x) = -A_n(x) \rightarrow -A_{n-1}(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k A_n(x) dx &= [-x^k A_{n-1}(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\ &+ k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} A_{n-1}(x) dx \end{aligned}$$

Comme $A_n(x)$ est de la forme $p(x)e^{-x^2}$ où $p(x)$ est un polynôme, donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x)e^{-x^2} = 0$$

autrement dit

$$[-x^k A_{n-1}(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

et on recommence avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} A_{n-1}(x) dx$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k A_n(x) dx = k! \int_{-\infty}^{+\infty} A_{n-k}(x) dx$$

mais $A_{n-k}(x)$ a une primitive de la forme $p(x)e^{-x^2}$ où $p(x)$ est un polynôme, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_{n-k}(x) dx = [p(x)e^{-x^2}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k A_n(x) dx = 0, k < n$$

voyons pour $k=n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n A_n(x) dx = n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = n! \sqrt{\pi}$$

voyons pour H_n

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) A_n(x) dx$$

Comme $H_n(x)$ est de la forme

$$H_n(x) = 2^n x^n + \dots + a$$

donc l'intégrale ne reste que le terme $2^n x^n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) A_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n x^n A_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

et bien sûr on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_k(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nk}$$

d'après

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k A_n(x) dx = 0, k < n$$

3.6 POLYNÔME DE LAGUERRE

Définition : On appelle le polynôme de Laguerre de degré p , de rang q le polynôme défini par:

$$L_p^q(x) = \frac{e^x x^{-q}}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{p+q}), p, q \text{ entier } 0, 1, 2, \dots$$

p = le degré du polynôme

q = le rang du polynôme

exemple

$$L_2^1(x) = \frac{e^x x^{-1}}{2!} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-x} x^3)$$

$$(e^{-x} x^3)' = (-e^{-x} x^3 + 3e^{-x} x^2)$$

$$(e^{-x} x^3)'' = e^{-x} x^3 - 6e^{-x} x^2 + 6e^{-x} x$$

$$L_2^1(x) = \frac{x^2 - 6x + 6}{2}$$

Propriété et définition :

$$L_p^q(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(p+q)!}{(p-k)! (q+k)! k!} x^k$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
(e^{-x}x^{p+q})^{(p)} &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (e^{-x})^{(k)} (x^{p+q})^{(p-k)} \\
&= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{(p+q)!}{(p+q-(p-k))!} x^{p+q-(p-k)} \\
&= \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} (-1)^k e^{-x} \frac{(p+q)!}{(q+k)!} x^{q+k} \\
\frac{e^x x^{-q}}{p!} \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^{p+q}) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(p+q)!}{k!(p-k)!(q+k)!} x^k
\end{aligned}$$

exemple

$$L_2^1(x) = \frac{3!}{2!1!0!} - \frac{3!}{1!2!1!}x + \frac{3!}{0!3!2!}x^2$$

$$L_2^1(x) = \frac{6}{2} - \frac{6}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

en particulier

$$L_{n-1-1}^{2l+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1-1} (-1)^k \frac{(n+l)!}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} x^k$$

Attention !!! certains auteurs définissent les polynômes de Laguerre par

$$L_p^q(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{((p+q)!)^2}{(p-k)!(q+k)!k!} x^k$$

donc ça change tout dans les formules !!!!

Fonction génératrice de $L_p^q(x)$

$$G(t, x) = \frac{e^{-\frac{t}{1-t}x}}{(1-t)^{q+1}}$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{1-t}x}}{(1-t)^{q+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} L_p^q(x) t^p$$

Propriété 2 l'équation différentielle:

$$xy'' + (q + 1 - x)y' + py = 0$$

La solution est $L_p^q(x)$

Formule de récurrence

$$xL_p^q(x) = (2p + q + 1)L_p^q(x) - (p + q)L_{p-1}^q(x) - (p + 1)L_{p+1}^q(x)$$

Relation d'orthogonalité

$$\int_0^{+\infty} L_p^q(x)L_s^q(x) e^{-x} x^q dx = \frac{(p+q)!}{p!} \delta_{ps}$$

en particulier

$$\int_0^{+\infty} L_p^q(x)L_p^q(x) e^{-x} x^q dx = \frac{(p+q)!}{p!}$$

Démonstration

rappel intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-au} u^q du = \frac{q!}{a^{q+1}}$$

$$G(t, x) = \frac{e^{-\frac{t}{1-t}x}}{(1-t)^{q+1}}$$

est la fonction génératrice de $L_p^q(x)$ c'est-à-dire

$$\frac{e^{-\frac{t}{1-t}x}}{(1-t)^{q+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} L_p^q(x) t^p$$

ici on a : $\mu(x) = \begin{cases} e^{-x} x^q & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $[a, b] = [0, +\infty[$

Calculons

$$I = \int_0^{+\infty} G(t, x) G(t', x) \mu(x) dx$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{1-t}x}}{(1-t)^{q+1}} \frac{e^{-\frac{t'}{1-t'}x}}{(1-t')^{q+1}} e^{-x} x^q = \frac{e^{-(\frac{t}{1-t} + \frac{t'}{1-t'})x}}{[(1-t)(1-t')]^{q+1}} e^{-x} x^q$$

$$= \frac{e^{-(\frac{t}{1-t} + \frac{t'}{1-t'} + 1)x}}{[(1-t)(1-t')]^{q+1}} x^q = \frac{e^{-\frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')}x}}{[(1-t)(1-t')]^{q+1}} x^q$$

posons

$$u = \frac{1 - tt'}{(1-t)(1-t')}x$$

$$I = \frac{1}{(1-tt')^{q+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^q du = \frac{q!}{(1-tt')^{q+1}} = I(tt')$$

or cette fonction $I(tt')$ se développe en série entière

$$\frac{q!}{(1-tt')^{q+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(q+p)!}{p!} (tt')^p$$

donc d'après le théorème on a

$$c_p = \frac{(q+p)!}{p!} = \langle L_p^q | L_p^q \rangle$$

$$\int_0^{+\infty} L_p^q(x) L_s^q(x) e^{-x} x^q dx = \frac{(p+q)!}{p!} \delta_{ps}$$

$$\int_0^{+\infty} L_p^q(x) L_p^q(x) e^{-x} x^q dx = \frac{(p+q)!}{p!}$$

Propriété de normalisation

$$\int_0^{+\infty} L_p^q(x) L_p^q(x) e^{-x} x^{q+1} dx = (2p+q+1) \frac{(p+q)!}{p!}$$

Démonstration

$$\int_0^{+\infty} L_p^q(x) L_p^q(x) e^{-x} x^{q+1} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} L_p^q(xL_p^q) e^{-x} x^q dx =$$

avec la formule de récurrence, ça donne

$$= \int_0^{+\infty} L_p^q [(2p + q + 1)L_p^q - (p + q)L_{p-1}^q - (p + 1)L_{p+1}^q] e^{-x} x^q dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (2p + q + 1)L_p^q L_p^q e^{-x} x^q dx$$

$$- \int_0^{+\infty} (p + q)L_p^q L_{p-1}^q e^{-x} x^q dx$$

$$- \int_0^{+\infty} (p + 1)L_p^q L_{p+1}^q e^{-x} x^q dx$$

D'après la relation d'orthogonalité, il ne nous reste que le premier intégral

$$= \int_0^{+\infty} (2p + q + 1)L_p^q L_p^q e^{-x} x^q dx = (2p + q + 1) \frac{(p + q)!}{p!}$$

Propriété 3 :

$$L_p^q(x) = \sum_{k=0}^p L_k^{q-1}(x)$$

Propriété 4 :

$$L_p^q(x) = L_p^{q+1}(x) - L_{p-1}^{q+1}(x)$$

Propriété 5 :

$$\frac{d}{dx} L_p^q(x) = -L_{p-1}^{q+1}(x)$$

3.7 QUELQUES INTÉGRALES CONNUES

Voici quelques intégrales que nous aurons besoin

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{e^x - 1} dx = \zeta(m)\Gamma(m)$$

Démonstration

Rappel :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

or

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{+\infty} x^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-(n+1)x} dx$$

on pose

$$(n+1)x = t \Rightarrow x = \frac{t}{n+1}, dx = \frac{dt}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{t}{n+1} \right)^{m-1} e^{-t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^m \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-t} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{e^x - 1} dx = \zeta(m) \Gamma(m)$$

Un cas particulier

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \zeta(4) \Gamma(4) = \frac{\pi^4}{90} 3! = \frac{\pi^4}{15}$$

4 LE FORMALISME DE LA PHYSIQUE QUANTIQUE

4.1 LA RENCONTRE DU PREMIER TYPE

La première propriété de la Physique Quantique que l'on rencontre est la suivante:

(ψ): Le résultat d'une expérience est différente à chaque fois qu'on répète l'expérience ! et en plus ceci est complètement aléatoire ! (suivant une certaine probabilité).

Autrement dit, on fait une expérience E sur un système quantique Ω :

→ On réalise la 1^{er} fois l'expérience E, on trouve le résultat a,

→ On réalise la 2^{ème} fois la même expérience E, on trouve le résultat b,

→ On réalise la 3^{ème} fois la même expérience E, on trouve le résultat c,

.....

et ceci de façon aléatoire c'est-à-dire on tombe sur a avec une probabilité $\text{prob}(a)$, sur b avec une probabilité $\text{prob}(b)$, sur c avec une probabilité $\text{prob}(c)$,

C'est vraiment étrange , ceci trouble profondément Einstein, "il manque quelque chose" disait-il, car "Dieu ne joue pas aux dés !!"

En tout cas c'est l'une des caractéristiques de la PQ (Physique Quantique). Ceci dit, le travail suivant c'est trouver un formalisme mathématique associé à la propriété (4), c'est-à-dire qui décrit la propriété (4) .

Pour simplifier on suppose que l'expérience E ne donne que trois valeurs réelles a, b, c $\in \mathbb{R}$.

Voici le formalisme proposé par Bohr (et son école de Copenhague) nommé formalisme de Copenhague.

- On prend le combinaison linéaire de a, b, c :

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \quad ; \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

on pose

$$\psi = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

- Et par définition

$$\text{prob}(a) = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}$$

$$\text{prob}(b) = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}$$

$$\text{prob}(c) = \frac{|\gamma|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}$$

ces probabilités s'appellent la règle de Born c'est lui qui a proposé ces formules d'après ses calculs et les données des expériences.

passons par la notation Dirac

ψ , a, b, c seront notés $|\psi\rangle$, $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ on dira alors $|\psi\rangle$, $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ sont des états de Ω . $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ sont des états ayant une valeur bien définies a, b, c et $|\psi\rangle$ est un état qui n'a pas de valeur bien définie, c'est un état de superpositions des états $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$.

$$|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle + \gamma|c\rangle$$

Pour Bohr, avant la mesure de Ω (avant de trouver le résultat) le système est dans l'état $|\psi\rangle$, après la mesure de Ω par exemple on trouve le résultat a, le système passe alors de l'état $|\psi\rangle$ à l'état $|a\rangle$.

En résumé, le formalisme de Copenhague dit:

Avant la mesure, le système est dans l'état $|\psi\rangle$, après la mesure, par ex on trouve b, avec la probabilité :

$$\text{prob}(b) = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}$$

Le système passe de l'état $|\psi\rangle$ à l'état $|b\rangle$

Si on refait immédiatement la 2ème mesure après la 1er mesure on trouve bien sûr encore b, le système est toujours en état $|b\rangle$.

ce qui traduit bien mathématiquement la propriété (4).

Bien que ce formalisme marche depuis 1930 sans aucun problème mais il pose énormément de problème de logique, de concepts etc

Voyons un peu quelques uns :

1) C'est l'expression $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle + \gamma|c\rangle$ qui pose un problème.

-Physiquement comment est l'état $|\psi\rangle$ c'est à dire l'état de superposition ?

-Physiquement est-il accessible ? observable en laboratoire ? sinon comment est-on sûr ce genre d'état existe ? Logiquement cet état n'est pas observable car une observation est une mesure !

2) La mesure perturbe l'état du système : la mesure fait le système passer brusquement de l'état $|\psi\rangle$ à l'état $|a\rangle$ (par ex). Donc physiquement que se passe-t-il ? de l'état $|\psi\rangle$ à l'état $|a\rangle$ que se passe-t-il réellement ?

3) L'évolution de $|\psi\rangle$ à $|a\rangle$ n'est pas unitaire ! en $|a\rangle$ on ne sait pas d'où on vient ! (non déterministe)

4) Une simple observation (mesure) du système change l'état du système, donc un chat, un chien regarde le système change-t-il l'état du système ?

...

4.2 L'ESPACE DES ÉTATS

On se place dans un espace-temps de la relativité restreinte et on fixe un référentiel inertiel \mathcal{R} , une fois le référentiel \mathcal{R} fixé on peut définir la simultanéité de deux événements, donc en physique quantique tout se passe dans un espace-temps avec un référentiel inertiel fixé.

Soit Ω un système quantique, à chaque instance t le système a un état $\psi(t)$, le système est décrit par $\psi(t)$ et l'ensemble de ces états forme un espace de Hilbert \mathcal{H} complet et séparable .

On note $\psi(t)$ par $|\psi(t)\rangle$ ou simplement $|\psi\rangle$ un ket , notation Dirac

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

Le système Ω peut se caractériser par plusieurs grandeurs physiques mais pour simplifier nous dirons qu'il est caractérisé par une seule grandeur physique \underline{G} , c'est-à-dire \underline{G} est une grandeur pertinente pour le système. Et \underline{G} peut prendre des valeurs réelles distinguées non-dégénérées⁽²⁾ $g_1, g_2, \dots, g_i, \dots$ en nombre fini ou infini dénombrable (nous verront plus tard le cas continu).

À la grandeur \underline{G} on associe un observable \hat{G} défini de la façon suivante :

$$\hat{G}|g_i\rangle = g_i|g_i\rangle$$

g_i est donc la valeur propre (non-dégénérée) associée au vecteur propre $|g_i\rangle$

Les états $|g_1\rangle, |g_2\rangle, \dots, |g_i\rangle, \dots$ sont nommés les états propres, les états qui ont une valeur bien définie $g_1, g_2, \dots, g_i, \dots$

Et on définit les $\{|g_i\rangle\}_i$ comme une base orthonormée de \mathcal{H} de la façon suivante :

$$\langle g_i | g_j \rangle = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

donc \hat{G} , sous la forme matricielle, dans la base $\{|g_i\rangle\}_i$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix}$$

Remarque : Dans cette formulation (formulation de Schrodinger) l'état $|\psi(t)\rangle$ dépend du temps t , et les observables \hat{A} (opérateur auto-adjoint) sont indépendants du temps. Dans la formulation de Heisenberg l'état $|\psi\rangle$ est indépendant du temps mais les observables dépendent du temps $\hat{A}(t)$.

Le produit scalaire de $|\psi\rangle$ et $|\chi\rangle$ est noté

$$\langle \psi | \chi \rangle$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = \sum_i \psi_i^* \chi_i$$

on pose

$$\langle \psi | = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \dots)$$
 un bra, vecteur ligne

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ un ket, vecteur colonne}$$

On peut regarder le bra $\langle\psi|$ comme une forme linéaire qui à tout vecteur $|\chi\rangle$ associe un nombre : le produit scalaire $\langle\psi|\chi\rangle$

La norme de ψ

$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle$$

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$$

4.3 LE POSTULAT DE LA MESURE

Soit $|\psi\rangle$ un état de Ω alors on a :

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |g_i\rangle$$

La mesure de la grandeur \underline{G} (quand le système Ω est dans l'état $|\psi\rangle$), en abrégé la mesure de Ω , prend l'une des valeurs g_i de façon aléatoire suivant une certaine probabilité, c'est-à-dire un coup on tombe sur g_1 , un coup sur g_2 , un coup sur g_3 , ... avec la probabilité :

$$\text{prob}(g_i) = \text{prob}(|g_i\rangle) = \frac{|\alpha_i|^2}{\sum_k |\alpha_k|^2}$$

Si on trouve g_i , on passe alors de l'état $|\psi\rangle$ à l'état $|g_i\rangle$ (il y a une réduction du vecteur d'état $|\psi\rangle$) et si on refait immédiatement la mesure on trouve encore g_i et on est toujours à l'état $|g_i\rangle$

Remarque: $|\psi\rangle$ et $\alpha|\psi\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ représentent le même état physique.

(\square) NOTE : On a supposé que les valeurs propres sont non-dégénérée c'est-à-dire les espaces propres E_i sont de dimension 1. Si l'une des valeurs propres est dégénérée, g_3 (par ex) et $\dim E_3 = 2$ alors on a:

$$\hat{G}|u\rangle = g_3|u\rangle$$

$$\hat{G}|v\rangle = g_3|v\rangle$$

$\{|u\rangle, |v\rangle\}$ base de E_3 et

$$|g_3\rangle = h|u\rangle + k|v\rangle$$

$$\alpha_3|g_3\rangle = \alpha_3h|u\rangle + \alpha_3k|v\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|v\rangle$$

d'où

$$|\psi\rangle = \dots + (\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle) + \dots$$

alors on a:

$$\text{prob}(g_3) = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{\|\psi\|^2}$$

et l'état $|\psi\rangle$ devient l'état $(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle)$

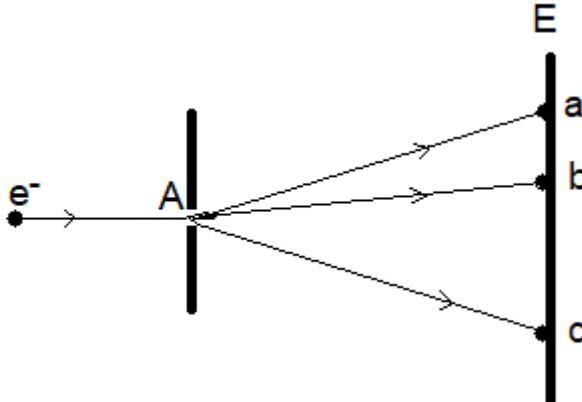
Commentaire

Cette règle est vraiment étrange, et elle fait couler beaucoup d'encre

A. Le caractère aléatoire des résultats

1. Le résultat de la mesure change tout temps ! un coup c'est g_1 , un coup c'est g_6 , le coup suivant c'est g_5 ... c'est vraiment étrange on ne trouve pas le même résultat pour la même expérience !

Par ex si on fait passer un électron e^- à travers un petit trou A pour aller à l'écran E, à chaque répétition de cette même expérience l'électron atterrira aux différents endroits a, b, c, ... et en plus c'est complètement aléatoire !



Le caractère aléatoire des résultats choque profondément Einstein. Il pensait qu'il manque quelque chose au formalisme quantique pour le rendre déterministe.

2. Que se passe-t-il si deux expérimentateurs O_1 et O_2 mesurent simultanément le système ? comme le résultat est aléatoire, il se peut que ces deux expérimentateurs ne trouvent pas la même chose, par ex O_1 trouve g_3 et O_2 trouve g_7 !! au même instant on a 2 états différents !!

Voyons ce qui se passe:

I. Si le système Ω est irréductible (non composé) alors il est impossible de brancher deux appareils de mesure sur le même point A, car en un point de l'espace ne peut occuper deux objets au même instant.

II. Si le système Ω est réductible il est alors composé de deux sous-système A, B :

→ Si A et B sont indépendants (non intriqués) $\Omega = \{\{A\}, \{B\}\}$ alors on peut bien sûr brancher en même temps deux appareils de mesure sur A et B, et ça peut donner des résultats différents, mais il n'y a pas de contradiction car on ne mesure pas Ω mais les sous-système A et B !!! .

→ Si A et B sont intriqués (non indépendants) $\Omega = \{A, B\}$ alors on peut brancher en même temps deux appareils de mesure sur A et B, et les résultats sont toujours identiques à cause l'intrication .

B. La réduction des composantes

Immédiatement après la mesure on passe brusquement de l'état

$$\sum_i \alpha_i |g_i\rangle$$

à l'état

$|g_i\rangle$

ce qui est vraiment perturbant .

En physique classique l'acte de mesure est passible il transmet simplement la valeur du système, par ex une voiture qui roule a une certaine vitesse, si on la mesure et on trouve 100km/h c'est qu'avant la mesure la voiture possède déjà la vitesse 100km/h , cette vitesse vaut toujours 100km/h que l'on la mesure ou non.

En physique quantique ça se passe autrement, l'acte de mesure n'est plus passible, il perturbe le système ! parce qu'il y a une interaction entre le système et l'appareil de mesure, ce qui fait que si on trouve 100km/h on ne peut pas dire avant la mesure la vitesse vaut 100km/h mais alors si ce n'est pas 100km/h c'est combien ?, et pourquoi on trouve 100km/h pourquoi pas 217km/h ? bref ... c'est bizarre ... En fait on ne sait pas !! la vitesse n'est pas définie avant la mesure !! on dit que la vitesse est en superposition elle n'a pas de valeur bien définie !!!

Par ex

$|u\rangle = |g_1\rangle + |g_2\rangle$

On ne peut pas avoir $|u\rangle$ dans sa totalité ...

l'état $|u\rangle$ n'a pas une valeur bien définie parce qu'on n'a pas utilisé la bonne grandeur pour mesure $|u\rangle$. On montre qu' il existe une grandeur F dont $|u\rangle$ a une valeur bien

définie mais $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ n'ont pas une valeur bien définie pour la grandeur \underline{E} .

4.4 VALEUR MOYENNE DE \widehat{G}

Le résultat de la mesure étant aléatoire, donc quelle est la valeur, le nombre ou le chiffre qu'il faut utiliser pour couper un tige par ex ?

Eh bien, on va utiliser la valeur 'moyenne' de \widehat{G} (dans l'état ψ)

$$\langle \widehat{G} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i g_i \text{prob}(g_i) = \sum_i g_i \frac{|\alpha_i|^2}{\sum_k |\alpha_k|^2}$$

$$\langle \widehat{G} \rangle = \frac{\sum_i g_i |\alpha_i|^2}{\sum_k |\alpha_k|^2}$$

on a

$$\langle \widehat{G} \rangle = \frac{\langle \psi | \widehat{G} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

en effet

$$\begin{aligned} \langle \psi | \widehat{G} | \psi \rangle &= \left\langle \sum_i \alpha_i |g_i\rangle \right| \widehat{G} \left| \sum_j \alpha_j |g_j\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_i \alpha_i |g_i\rangle \right| \sum_j \alpha_j \widehat{G} |g_j\rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i |g_i\rangle \right| \sum_j \alpha_j g_j |g_j\rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i^* \alpha_j g_j \langle g_i | g_j \rangle = \sum_i \alpha_i^* \alpha_i g_i = \sum_i g_i |\alpha_i|^2$$

et

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_k |\alpha_k|^2$$

en particulier si on prend un état normé ça donne

$$\langle \hat{G} \rangle = \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle$$

La valeur moyenne de \hat{G} (dans l'état ψ)

Propriétés des valeurs moyennes d'un observable

1. $\alpha \in \mathbb{C}$, $\langle \alpha \rangle = \alpha$
2. $\langle \hat{A} + \hat{B} \rangle = \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{B} \rangle$
3. $\langle \alpha \hat{A} \rangle = \alpha \langle \hat{A} \rangle$
4. $\langle \hat{A} \rangle$ est réel, en effet:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi | \psi \rangle = \langle \hat{A} \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle^*$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^* = \langle \hat{A} \rangle^*$$

L'écart-type

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

on a:

$$\begin{aligned}
 5. \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle &= \langle \hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \rangle \\
 &= \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \\
 &= \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2
 \end{aligned}$$

6. $\hat{a} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$, \hat{a} est autoadjoint

$$\hat{a}^\dagger = (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^\dagger = \hat{A}^\dagger - \langle \hat{A} \rangle = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle = \hat{a}$$

Relation des dispersions

Soient \hat{A} , \hat{B} deux observables non compatibles

$$([\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0)$$

calculons la norme de

$$(\hat{A} - ix\hat{B})|\psi\rangle \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

$$\langle (\hat{A} - ix\hat{B})\psi | (\hat{A} - ix\hat{B})\psi \rangle$$

$$\langle (\hat{A}\psi - ix\hat{B}\psi) | (\hat{A}\psi - ix\hat{B}\psi) \rangle$$

$$(\hat{A} - ix\hat{B})(\hat{A} - ix\hat{B}) = \hat{A}^2 - ix\hat{A}\hat{B} + ix\hat{B}\hat{A} - i^2x^2\hat{B}^2$$

$$= \hat{B}^2x^2 - i[\hat{A}, \hat{B}]x + \hat{A}^2$$

passons nous par la valeur moyenne

$$\langle \hat{B}^2 \rangle x^2 + \langle -i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle x + \langle \hat{A}^2 \rangle$$

d'une part $-i[\hat{A}, \hat{B}]$ est un opérateur autoadjoint donc sa valeur moyenne est réelle, et d'autre part $\langle \hat{B}^2 \rangle \geq 0$ puisque c'est la norme $\|\hat{B}\psi\|$. On a une inéquation de seconde degré à coefficients réels

$$\langle \hat{B}^2 \rangle_x^2 + \langle -i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle_x + \langle \hat{A}^2 \rangle \geq 0$$

donc le discriminant doit être ≤ 0

$$\langle -i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 - 4\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \leq 0$$

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle -i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 \quad (\text{a})$$

Posons maintenant

$$\hat{a} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$$

$$\hat{b} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$$

\hat{a} et \hat{b} sont autoadjoints donc on peut appliquer la formule (a)

$$\langle \hat{a}^2 \rangle \langle \hat{b}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle -i[\hat{a}, \hat{b}] \rangle^2$$

d'où:

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \rangle$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = (\Delta \hat{A})^2$$

de même pour \hat{b}

$$\langle \hat{b}^2 \rangle = \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2 = (\Delta \hat{B})^2$$

calculons $[\hat{a}, \hat{b}]$

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}, \hat{b}] &= \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} \\
 &= (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \\
 &\quad - (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) \\
 &= \hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle \hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle\hat{B} + \langle \hat{A} \rangle\langle \hat{B} \rangle \\
 &\quad - \hat{B}\hat{A} + \hat{B}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{B} \rangle\hat{A} - \langle \hat{B} \rangle\langle \hat{A} \rangle
 \end{aligned}$$

finalement

$$[\hat{a}, \hat{b}] = [\hat{A}, \hat{B}]$$

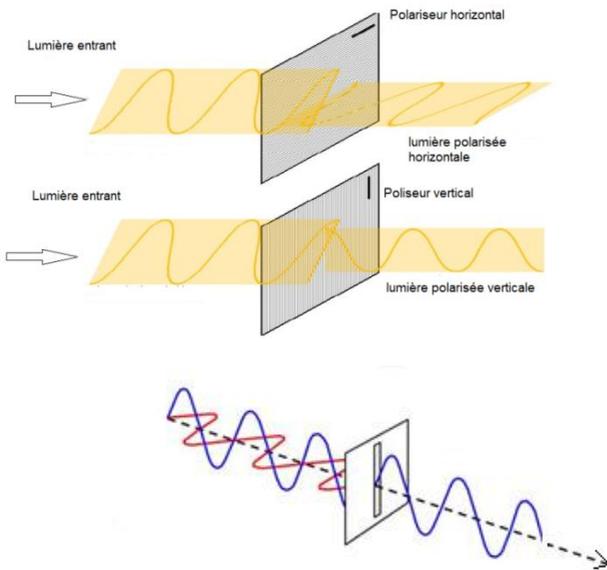
d'où l'inégalité des dispersions

$$\Delta\hat{A} \Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

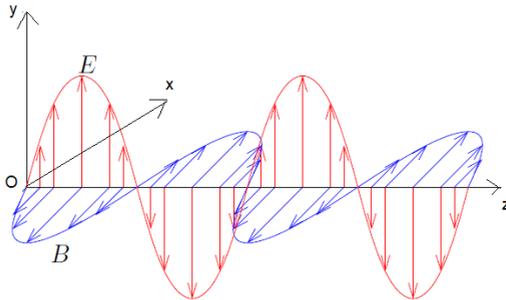
5 POLARISATION

5.1 POLARISATION DE LA LUMIÈRE

La polarisation de la lumière est découverte par Malus en 1808, c'est une propriété, une caractéristique de la lumière comme la fréquence ν , l'énergie E ...

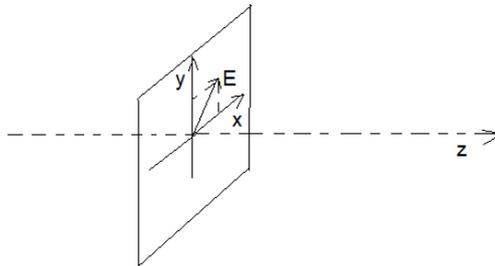


La lumière polarisée



Onde électromagnétique

La lumière est une onde électromagnétique (E,B), la polarisation est la façon que E oscille dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (plan d'onde).



On regarde E dans le plan $z=0$

Supposons que la lumière se propage dans la direction z , alors on a

$$E = \begin{cases} E_x = a \cos(kz - \omega t) \\ E_y = b \cos(kz - \omega t - \varphi) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

a, b = constantes réelles, k = nombre d'onde, ω = pulsation, φ = phase

On regarde le champ E dans le plan $z = C^{te}$ par ex $z=0$, ça donne

$$E = \begin{cases} E_x = a \cos(-\omega t) = a \cos(\omega t) \\ E_y = b \cos(-\omega t - \varphi) = b \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Polarisation linéaire

C'est dans le cas $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$

▣ $\varphi=0$

$$\begin{cases} E_x = a \cos(\omega t) \\ E_y = b \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{a}{b} = C^{te}$$

donc E a une direction fixe.

▣ $\varphi=\pi$

$$\begin{cases} E_x = a \cos(\omega t) \\ E_y = b \cos(\omega t + \pi) = -b \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\frac{E_x}{E_y} = -\frac{a}{b} = C^{te}$$

là aussi E a une direction fixe. La polarisation linéaire signifie que la tête de E décrit un segment.

Polarisation elliptique

$$\begin{cases} E_x = a \cos(\omega t) \\ E_y = b \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{E_x}{a} = \cos(\omega t) \\ \frac{E_y}{b} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\varphi) \cos(\omega t) - \sin(\varphi) \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 = \cos^2(\omega t) \\ \frac{E_y}{b} = \cos(\varphi) \frac{E_x}{a} - \sin(\varphi) \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 \sin^2(\varphi) = \cos^2(\omega t) \sin^2(\varphi) \\ \left(\frac{E_y}{b} - \cos(\varphi) \frac{E_x}{a}\right)^2 = \sin^2(\varphi) \sin^2(\omega t) \end{cases}$$

$$\left(\frac{E_x}{a}\right)^2 \sin^2(\varphi) + \left(\frac{E_y}{b} - \cos(\varphi) \frac{E_x}{a}\right)^2 = \sin^2(\varphi)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 \sin^2(\varphi) + \left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{a} \frac{E_y}{b} \cos(\varphi) + \cos^2 \varphi \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 \\ = \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{E_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2 \cos(\varphi) \frac{E_x}{a} \frac{E_y}{b} - \sin^2(\varphi) = 0$$

$$b^2 E_x^2 + a^2 E_y^2 - 2ab \cos \varphi E_x E_y - a^2 b^2 \sin^2 \varphi = 0$$

c'est l'équation d'une ellipse.

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

La polarisation elliptique signifie que la tête de E décrit une ellipse.

Polarisation circulaire

$a=b$ et $\varphi=\pi/2$ (droite, le champ E tourne dans le sens horaire)

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2 \text{ (l'équation d'un cercle)}$$

$a=b$ et $\varphi= -\pi/2$ (gauche, le champ E tourne dans le sens anti-horaire)

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2$$

Retrouvons la polarisation linéaire

$$\square \varphi=0$$

$$b^2 E_x^2 + a^2 E_y^2 - 2ab E_x E_y = 0$$

$$(bE_x - aE_y)^2 = 0$$

$$E_x = \frac{a}{b} E_y$$

$$\square \varphi=\pi$$

$$b^2 E_x^2 + a^2 E_y^2 + 2ab E_x E_y = 0$$

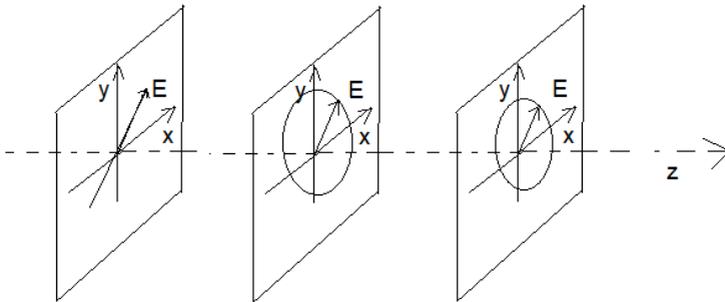
$$(bE_x + aE_y)^2 = 0$$

$$E_x = -\frac{a}{b} E_y$$

La polarisation circulaire signifie que la tête de E décrit d'un cercle.

Résumons : Il y a 3 façons que le champ E oscille dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation:

▫ linéaire ($\varphi=0,\pi$) , circulaire ($\varphi=\pi/2, -\pi/2$), elliptique.



Polarisation linéaire, circulaire, elliptique

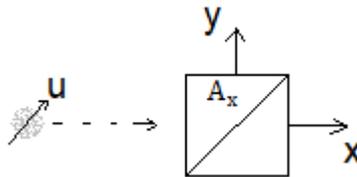
La polarisation est une propriété intrinsèque de la lumière.

5.2 POLARISATION D'UN PHOTON

Comme la lumière est composée de photons, donc le photon lui même possède une polarisation, c'est une propriété, une caractéristique du photon comme la fréquence ν , l'énergie E , etc ...

La polarisation du photon est la façon que le photon "oscille" dans plan perpendiculaire à la direction de propagation, c'est un vecteur

On utilise un polariseur pour mesurer la polarisation du photon, un polariseur A_a (suivant la direction a), donne deux sorties : a et a^\perp (=orthogonale-direct à a) , par convention la sortie a vaut +1 (transmission) et la sortie a^\perp vaut -1 (réflexion). On prend alors un polariseur A_x c'est-à-dire suivant Ox (horizontal) donc Oy =vertical, $Oy \perp Ox$,



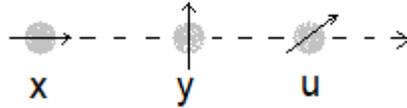
Polariseur A_x

Donc si le photon est sorti du côté +1, ça signifie que le photon est polarisé suivant x , du côté -1 le photon est polarisé suivant y . Soient \hat{p}_x la grandeur polarisation (suivant x) qui ne peut prendre que deux valeurs +1 et -1 et $\hat{\rho}_x$ l'observable associé :

$$\hat{\rho}_x |x\rangle = |x\rangle$$

$$\hat{\rho}_x |y\rangle = -|y\rangle$$

où $|x\rangle$ l'état de polarisation horizontal, $|y\rangle$ l'état de polarisation vertical.



On pose

$|\psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et

$\mathcal{H} = \text{vect} \{|x\rangle, |y\rangle\}$ c'est un \mathbb{C} -esv ($=\mathbb{C}^2$), l'espace des polarisations, et $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ une base orthonormée de \mathcal{H} .

exemples

Un photon ξ est polarisé suivant u (polarisation linéaire), ça signifie que son vecteur de polarisation est dans la direction u .



Le photon ξ est polarisé suivant la direction u

$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle$

où $\theta = (\widehat{x, u}) = \text{angle}(x, u)$

et d'autres états de polarisations

$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle)$

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - |y\rangle)$

ou encore le photon peut se mettre aussi en polarisation circulaire droite $|d\rangle$ et circulaire gauche $|g\rangle$.

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle)$$

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle)$$

La polarisation elliptique

$$|\zeta\rangle = \cos\theta |x\rangle + e^{i\varphi} \sin\theta |y\rangle$$

Si le photon ξ polarisé suivant u . Cet état s'écrit dans la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$

$$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle ; \text{ où } \theta = (\widehat{x}, \widehat{u})$$

→La probabilité que ξ sort suivant x est

$$\text{prob}(x) = \cos^2\theta = |\langle x|u\rangle|^2$$

et immédiatement après la mesure l'état $|u\rangle$ passe à l'état $|x\rangle$

pour $\text{prob}(x)$ on note aussi $\text{prob}(|x\rangle)$ probabilité d'avoir l'état $|x\rangle$

→La probabilité que ξ sort suivant y est

$$\text{prob}(y) = \sin^2\theta = |\langle y|u\rangle|^2 = \text{prob}(|y\rangle)$$

et immédiatement après la mesure l'état $|u\rangle$ passe à l'état $|y\rangle$

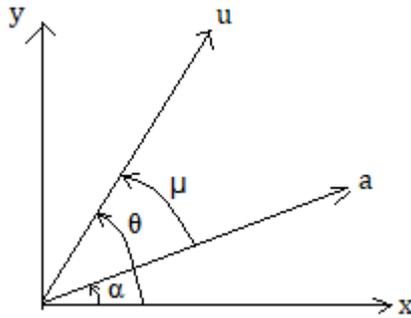
on écrit aussi

$\text{prob}(|y\rangle) = \sin^2\theta = |\langle y|u\rangle|^2$; probabilité d'avoir l'état $|y\rangle$.

Soit un photon ξ polarisé en u

$$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle$$

On va mesurer ξ par le polariseur A_a , $\alpha = (\widehat{x}, \widehat{a})$



pour ça il faut exprimer $|u\rangle$ en fonction de $|a\rangle$ et $|a^\perp\rangle$ on a

$$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle$$

$$|x\rangle = \cos\alpha |a\rangle - \sin\alpha |a^\perp\rangle$$

$$|y\rangle = \sin\alpha |a\rangle + \cos\alpha |a^\perp\rangle$$

d'où

$$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle$$

$$|u\rangle = \cos\theta (\cos\alpha |a\rangle - \sin\alpha |a^\perp\rangle) + \sin\theta (\sin\alpha |a\rangle + \cos\alpha |a^\perp\rangle)$$

$$= \cos\theta \cos\alpha |a\rangle - \cos\theta \sin\alpha |a^\perp\rangle + \sin\theta \sin\alpha |a\rangle + \sin\theta \cos\alpha |a^\perp\rangle$$

$$|u\rangle = (\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha)|a\rangle + (\sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha)|a^\perp\rangle$$

$$|u\rangle = \cos(\theta-\alpha)|a\rangle + \sin(\theta-\alpha)|a^\perp\rangle$$

ainsi la probabilité que ξ sort dans la voie +1 est:

$$\text{prob}(+) = \text{prob}(a) = \text{prob}(|a\rangle) = \cos^2(\theta-\alpha)$$

dans la voie -1 est:

$$\text{prob}(-) = \text{prob}(a^\perp) = \text{prob}(|a^\perp\rangle) = \sin^2(\theta-\alpha)$$

Note : D'après le dessin on peut voir tout de suite que

$$|u\rangle = \cos\mu |a\rangle + \sin\mu |a^\perp\rangle \text{ avec } \alpha + \mu = \theta \text{ d'où le résultat.}$$

Si on pose

$$\hat{P}_x = |x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_y = |y\rangle\langle y| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les \hat{P}_x , \hat{P}_y sont des projecteurs sur les espaces propres E_1 , E_{-1} .

On remarque

$$\hat{P}_x + \hat{P}_y = \hat{I}$$

$$\hat{P}_u = |u\rangle\langle u|$$

$$\hat{P}_u |x\rangle = |u\rangle\langle u|x\rangle = (\cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle) \cos\theta$$

$$\hat{P}_u |y\rangle = |u\rangle\langle u|y\rangle = (\cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle) \sin\theta$$

$$\hat{P}_u = |u\rangle\langle u| = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta \cos\theta \\ \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Calculons la valeur moyenne de $\hat{\rho}_x$ en état u.

$$\langle \hat{\rho}_x \rangle = \langle u | \hat{\rho}_x | u \rangle$$

$$\hat{\rho}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\cos\theta \ \sin\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} &= (\cos\theta - \sin\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\langle \hat{\rho}_x \rangle = \langle u | \hat{\rho}_x | u \rangle = \cos 2\theta$$

Remarque : l'espace Hilbert des polarisations est beaucoup plus grand que la polarisation réelle.

$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle$; polarisation linéaire

$|d\rangle = |x\rangle + i|y\rangle$; polarisation circulaire droite

$|g\rangle = |x\rangle - i|y\rangle$; polarisation circulaire gauche

$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + e^{i\varphi} \sin\theta |y\rangle$; polarisation elliptique

$|\psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$; avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; cas général

Note : Ici on voit qu' un \mathbb{C} -espace vectoriel est nécessaire car si on prend un \mathbb{R} -espace vectoriel, on ne peut pas coder les polarisations gauche, droite et elliptique.

6 L'EXPÉRIENCE DE STERN-GERLACH

6.1 MOMENT MAGNÉTIQUE, MOMENT CINÉTIQUE ORBITAL

Un électron possède ce qu'on appelle un moment magnétique (aimant, boussole, boucle de courant, ...) μ et à chaque moment magnétique μ on associe un moment cinétique orbitale L par la relation suivante.

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{q}{2m_e} L$$

où $q=1,60219 \cdot 10^{-19}\text{C}$ la charge élémentaire et $m_e=9,10953 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ la masse d'électron

On peut se demander d'où sort cette formule ? comment la trouve-t-on ?

On peut retrouver cette formule par le stratagème suivant:

On prend un électron de charge $-q$ de masse m_e ayant un mouvement circulaire uniforme de rayon r , au tour du noyau à la vitesse v . Dans ce modèle boucle de courant on a:

Le moment cinétique orbital L vaut

$$L = m_e r \wedge v = (m_e r v) u \quad ; \quad (u = \text{vecteur unitaire})$$

et le moment magnétique μ vaut

$\mu = (IA) u$; I=courant , A=aire de la boucle

$$I = \frac{-q}{T} = \frac{-qv}{2\pi r} ; T=\text{période}$$

$$\mu = \left(\frac{-qv}{2\pi r} \pi r^2\right) u = \left(\frac{-qvm_e}{2m_e} r\right) u$$

$$\mu = \frac{-q}{2m_e} L$$

Note : C'est un stratagème, car dire que l'électron tourne autour du noyau en orbite est faux ! en effet un électron qui tourne autour du noyau d'après les lois d'électromagnétiques il rayonne (=crée un champ électromagnétique = émet de la lumière) donc perd de l'énergie et finit par tomber sur le noyau !! et on aurait plus d'atome !!!

Ce n'est pas une démonstration rigoureuse mais simplement un stratagème pour retrouver la formule, c'est tout !

Le moment magnétique μ est détectable par un champ magnétique B, on peut donc le mesurer, le connaître et par conséquent on peut calculer L par la relation ci-dessus puisque q et m_e sont connus.

L provient des mouvements de l'électron dans l'atome, ou plus tôt de l'organisation de l'électron par couches dans l'atome vue qu'on ne sait toujours pas comment l'électron bouge dans l'atome !.

Pour un atome, il faut sommer les μ sur tous les électrons de l'atome.

$$\mu = \sum_i \mu_i$$

Donc le moment magnétique μ de l'atome provient du moment cinétique orbital L des électrons, certains atomes n'ont pas de L , $L=0$ (l'organisation des électrons sur les couches annule L , $L=0$) donc pas de moment magnétique $\mu=0$ comme l'atome d'argent.

Un moment magnétique μ placé dans un champ magnétique B subit un couple Γ et une force F donnés par:

$$\Gamma = \mu \wedge B$$

$$E_p = -\mu \cdot B \quad \text{énergie potentielle}$$

$$F = -\nabla(E_p) = \nabla(\mu \cdot B)$$

La force dérive d'une potentielle.

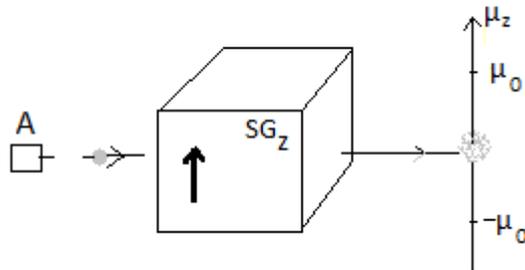
L'expérience de Stern-Gerlach

On envoie des atomes d'argent dans une zone où règne un champ magnétique B inhomogène dirigé suivant l'axe z (orthogonal à la vitesse des atomes), on va nommer cet appareil SG_z . On mesure la déviation des atomes en regardant leur impacts sur un écran.

Les atomes envoyés ne portent pas de moment cinétique orbital L , $L=0$ donc pas de moment magnétique

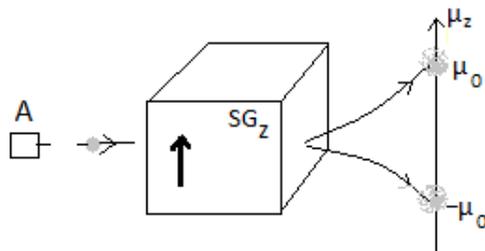
$$\mu = -\frac{q}{2m_e} L = 0 \quad \text{non plus, donc aucune déviation prévue on}$$

devrait voir une tache au milieu de l'écran,



On devrait voir

or on observe deux taches symétriques en haut et en bas
!!!



Mais ce que montre l'expérience

Pour expliquer la déviation on peut imaginer que les atomes possèdent un nouveau type de moment cinétique S , qui engendre un nouveau type de moment magnétique μ_s par la relation

$$\mu_s = \gamma_s S$$

dans ce cas , le moment magnétique μ_s subit :

d'un couple

$$\Gamma = \mu_s \wedge B$$

et d'une force

$$F = \nabla(\mu_s \cdot B)$$

Montrons que F vaut :

$$F_x = F_y = 0$$

et

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\text{où } \mu_s = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}$$

Démonstration

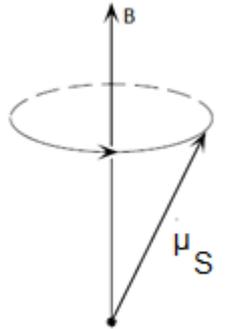
Le théorème des moments cinétiques dit :

$$\frac{dS}{dt} = \Gamma$$

$$\frac{dS}{dt} = \mu_s \wedge B$$

$$\frac{d(\gamma_s S)}{dt} = -\gamma_s B \wedge \mu_s$$

$$\frac{d\mu_S}{dt} = -\gamma_S B \wedge \mu_S$$



Mouvement de précession

On reconnaît l'équation du mouvement de presserions , ainsi ça montre que μ_S prend un mouvement de presserions autour de B avec une pulsation ω

$$\omega = -\gamma_S ||B||$$

Comme μ_x et μ_y décrivent un cercle dans le plant Oxy, en moyen ils valent zéro $\langle \mu_x \rangle = \langle \mu_y \rangle = 0$ on peut donc négliger μ_x et μ_y c'est-à-dire prendre $\mu_x = \mu_y = 0$

et $\mu_z = C^{te}$

$$\mu_S \cdot B = \mu_x B_x + \mu_y B_y + \mu_z B_z$$

$$\mu_S \cdot B = \mu_z B_z$$

d'autre part , par construction

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

$$\nabla(\mu_s \cdot B) = \nabla(\mu_z B_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

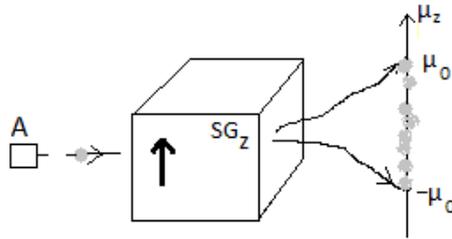
ce qui montre que la formule

$$F = F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Pour simplifier l'écriture on notera

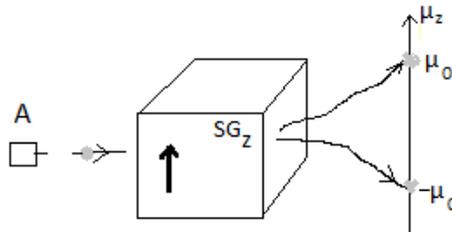
$$\mu_0 = ||\mu_s||$$

Ça explique la déviation (à cause de l'existence de μ_s), mais ça n'explique pas la déviation en deux taches symétriques en haut et en bas !!! en effet, en sortant de la source A, le moment magnétique μ_s a une direction quelconque il subit la force F_z , donc les impacts devraient se trouver entre les deux valeurs $+\mu_0$ et $-\mu_0$



On devrait voir ça

Or ces impacts se trouvent tous en $+\mu_0$ (avec la probabilité 1/2) ou $-\mu_0$ (avec la probabilité 1/2) et rien entre les deux !!!



Résultat de l'expérience

Il faut donc accepter que les atomes d'argent possèdent un nouveau type de moment cinétique S nommé spin et il est quantifié et ne peut prendre que deux valeurs $+\mu_0$ et $-\mu_0$.

Dans le cas général on a:

J (moment cinétique) = L (moment cinétique orbital) + S (spin)

μ (moment magnétique) = μ_L (moment magnétique orbital) + μ_S (moment magnétique spin)

$$J = L + S$$

$$\mu_L = - \frac{q}{2m_e} L$$

$$\mu_S = - \frac{q}{m_e} S$$

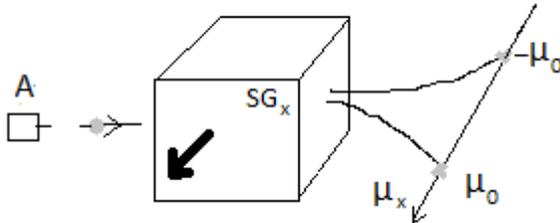
$$\mu = \mu_L + \mu_S$$

Dans le cas de l'atome d'argent on a:

$$L = 0 \text{ d' où } \mu_L = 0 \text{ donc}$$

$$\mu = \mu_S$$

On peut penser qu'en sortant de A, les atomes ont tous un μ_S suivant z, ce n'est pas le cas, car si on tourne l'appareil en direction x, SG_x on trouve de nouveau tous sur $+\mu_0$ (proba=1/2) ou $-\mu_0$ (proba=1/2) et rien entre les deux !!

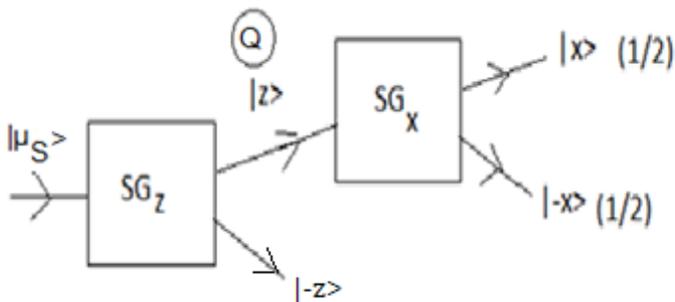


Et c'est pareil pour la direction y, ou u une direction quelconque !!.

L'appareil SG_z ressemble beaucoup au polarisateur A_a .

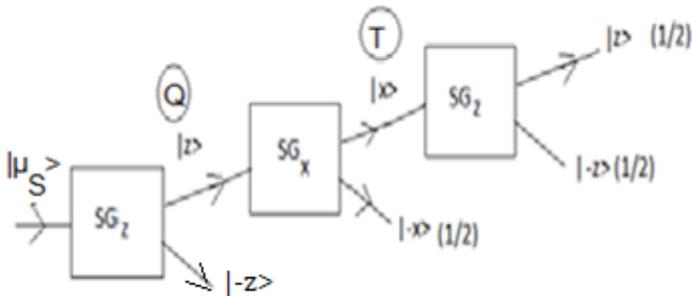
On va faire l'expérience Q suivante, on place les SG_z et SG_x comme indique le fig

On pose $|\mu_0\rangle_z = |z\rangle$, $|\mu_0\rangle_z = |-z\rangle$



On part de μ_S , on le fait traverser un SG_z et on selecte $|z\rangle$ puis on le fait passer dans SG_x : l'expérience montre qu'on a à la sortie 50% $|x\rangle$ et 50% $|-x\rangle$

et si on continue ... on select $|x\rangle$ et on place un SG_z comme indique la fig



l'expérience montre qu'on a à la sortie 50% $|z\rangle$ et 50% $|-z\rangle$!!!

Si on observe bien, la mesure modifie le système !! en effet

à (Q) \rightarrow avant d'entrer dans SG_x notre état est $|z\rangle$, le résultat de la mesure est $|x\rangle$ ou $|-x\rangle$ ça signifie que l'état

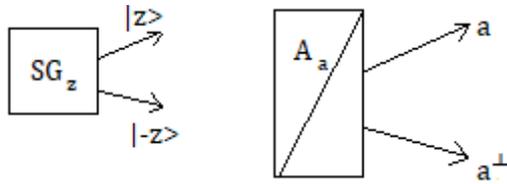
$|z\rangle$ devient $\alpha|x\rangle + \beta|-x\rangle$!!

à (T) \rightarrow avant d'entrer dans SG_z notre état est $|x\rangle$, le résultat de la mesure est $|z\rangle$ ou $|-z\rangle$ ça signifie que l'état

$|x\rangle$ devient $\alpha|z\rangle + \beta|-z\rangle$!!

D'après cette expérience, on peut considérer que l'appareil SG_z mesure la grandeur μ_z d'une particule et que μ_z ne peut prendre que deux valeurs $+\mu_0$ et $-\mu_0$, et l'observable $\hat{\mu}_z$ possède deux valeurs propres $+\mu_0$ et $-\mu_0$.

SG_z ressemble au polariseur A_a



Avant d'entrer dans la machine SG_z l'état $|\psi\rangle$ vaut

$$|\psi\rangle = \alpha|\mu_0\rangle_z + \beta|-\mu_0\rangle_z$$

puisque l'on n'a que deux résultats $+\mu_0$ et $-\mu_0$ (d'après la règle de Born) par conséquent l'espace de Hilbert \mathcal{H} des états est de dimension 2, et que $|\mu_0\rangle_z = |z\rangle$, $|-\mu_0\rangle_z = |-z\rangle$ forment une base orthonormée de \mathcal{H} .

Comme l'axe z ne joue aucun rôle particulier, les mêmes considérations pour μ_x , μ_y ... les deux observables $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ eux aussi chacun a deux valeurs propres $+\mu_0$ et $-\mu_0$, et $\{|x\rangle, |-x\rangle\}$; $\{|y\rangle, |-y\rangle\}$ forment aussi des bases orthonormées de \mathcal{H} .

On va choisir $|z\rangle$ et $|-z\rangle$ comme base (orthonormée) de \mathcal{H} , et voyons comment les autres états $|x\rangle$, $|-x\rangle$, $|y\rangle$ et $|-y\rangle$ s'expriment en fonction de $|z\rangle$ et $|-z\rangle$.

Allons y

$$|x\rangle = \alpha|z\rangle + \beta|-z\rangle$$

$$\alpha = re^{ia}, r > 0, a \in [0, 2\pi[$$

$$\beta = \rho e^{ib}, \rho > 0, b \in [0, 2\pi[$$

on pose $b - a = \varphi$

$$|x\rangle = r|z\rangle + \rho e^{i\varphi} |-z\rangle$$

car $|x\rangle$ et $e^{-ia}|x\rangle$ donnent le même état physique

donc on peut imposer $\alpha = r > 0$

finalement les conditions:

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\text{prob}(\mu_0) = 1/2$$

$$\text{prob}(-\mu_0) = 1/2$$

$$|\alpha|^2 = 1/2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } \alpha \text{ est réel positif}$$

$$|\beta|^2 = 1/2 \Rightarrow |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + e^{i\varphi} |-z\rangle) \quad (\alpha)$$

on pose $e^{i\varphi} |-z\rangle = |-z'\rangle$ puis on renomme $|-z'\rangle$ en $|-z\rangle$

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle)$$

Pour la base $\{|z\rangle, |-z\rangle\}$ on arrive à (α) donc pour la base $\{|z\rangle, |-z'\rangle\}$ on arrive à (α) aussi,

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + e^{i\varphi} |-z'\rangle)$$

autrement dit

$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + e^{i\varphi}|-z\rangle)$$

or

$$\langle x|-x\rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} = 0$$

$$e^{i\varphi} = -1$$

$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - |-z\rangle)$$

Pour $|y\rangle$

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + e^{i\varphi}|-z\rangle)$$

si on fait passer l'état $|x\rangle$ dans la machine SG_y , on trouvera $|y\rangle$ (prob = 1/2) ou $|-y\rangle$ (proba=1/2) donc

$$|x\rangle = \alpha|y\rangle + \beta|-y\rangle$$

$$\text{avec } \text{prob}(y) = |\alpha|^2 = 1/2$$

$$\text{et } \alpha = \langle x|y\rangle$$

d'où

$$|\langle x|y\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} |1 + e^{i\varphi}|^2 = \frac{1}{2}$$

$$(1 + e^{i\varphi})(1 + e^{-i\varphi}) = 2$$

$$(2 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2$$

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 0$$

$$2\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$$

d'où

$$|y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle \pm i|-z \rangle)$$

comme $|-y \rangle$ est orthogonal à $|y \rangle$ on a

$$|-y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle \mp i|-z \rangle)$$

pour avoir une base (x,y,z) orthonormée directe on choisit

$$|x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle + i|-z \rangle)$$

$$|-x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle - i|-z \rangle)$$

résumé

$$I \begin{cases} |x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle + i|-z \rangle) \\ |-x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle - i|-z \rangle) \end{cases}$$

$$I' \begin{cases} |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + i|-z\rangle) \\ |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - i|-z\rangle) \end{cases}$$

Remarque très important :

L'égalité

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle)$$

c'est-à-dire

$$|\mu_0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mu_0\rangle_z + |-\mu_0\rangle_z)$$

Montre que l'état $|x\rangle$ n'a pas une valeur bien définie pour la grandeur $\underline{\mu}_z$ par contre il a une valeur bien définie pour la grandeur $\underline{\mu}_x$!!

$$|\mu_0\rangle_x \xrightarrow{\hat{\mu}_z} \mu_0 \text{ une fois sur 2}$$

$$|\mu_0\rangle_x \xrightarrow{\hat{\mu}_x} \mu_0 \text{ toujours}$$

par ex

$$|\psi\rangle = 2|g_1\rangle + 3|g_2\rangle$$

$|\psi\rangle$ n'a pas une valeur bien définie pour la grandeur \underline{G} , mais il a peut-être une valeur bien définie pour la grandeur \underline{E} et dans ce cas c'est $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ qui n'ont pas de valeurs bien définies pour la grandeur \underline{E} .

6.2 VOYONS LES MATRICES DE $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$, $\hat{\mu}_z$

On veut calculer les , matrices $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$, $\hat{\mu}_z$ dans la base $\{|z\rangle, |-z\rangle\}$, pour ça il y a plusieurs styles:

Style algèbre linéaire

$$\hat{\mu}_z |z\rangle = \mu_0 |z\rangle$$

$$\hat{\mu}_z |-z\rangle = -\mu_0 |-z\rangle$$

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calculons $\hat{\mu}_x$

$$\text{I} \begin{cases} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle) \\ |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - |-z\rangle) \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \hat{\mu}_x |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_x |z\rangle + \hat{\mu}_x |-z\rangle) \\ \hat{\mu}_x |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_x |z\rangle - \hat{\mu}_x |-z\rangle) \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} \mu_0 |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_x |z\rangle + \hat{\mu}_x |-z\rangle) \\ -\mu_0 |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_x |z\rangle - \hat{\mu}_x |-z\rangle) \end{cases}$$

comme on cherche $\hat{\mu}_x |z\rangle$ on fait la somme de III

$$\mu_0(|x \rangle - |-x \rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_x |z \rangle)$$

et la différence de I donne

$$\mu_0(|x \rangle - |-x \rangle) = \frac{2\mu_0}{\sqrt{2}} (|-z \rangle)$$

$$\hat{\mu}_x |z \rangle = \mu_0 |-z \rangle$$

de même pour $\hat{\mu}_x |-z \rangle$

la différence de III

$$\mu_0(|x \rangle + |-x \rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_x |-z \rangle)$$

et la somme de I

$$\mu_0(|x \rangle + |-x \rangle) = \frac{2\mu_0}{\sqrt{2}} (|z \rangle)$$

$$\hat{\mu}_x |-z \rangle = \mu_0 |z \rangle$$

La matrice est donc

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $\hat{\mu}_y$

$$I' \begin{cases} |y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle + i|-z \rangle) \\ |-y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z \rangle - i|-z \rangle) \end{cases}$$

$$\text{II}' \begin{cases} \hat{\mu}_y |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_y |z\rangle + i\hat{\mu}_y |-z\rangle) \\ \hat{\mu}_y |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_y |z\rangle - i\hat{\mu}_y |-z\rangle) \end{cases}$$

$$\text{III}' \begin{cases} \mu_0 |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_y |z\rangle + i\hat{\mu}_y |-z\rangle) \\ -\mu_0 |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_y |z\rangle - i\hat{\mu}_y |-z\rangle) \end{cases}$$

la somme de III'

$$\mu_0 (|y\rangle - |-y\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_y |z\rangle)$$

la différence de I'

$$\mu_0 (|y\rangle - |-y\rangle) = \frac{2\mu_0 i}{\sqrt{2}} (|-z\rangle)$$

$$\hat{\mu}_y |z\rangle = \mu_0 i |-z\rangle$$

la différence de III'

$$\mu_0 (|y\rangle + |-y\rangle) = \frac{2i}{\sqrt{2}} (\hat{\mu}_y |-z\rangle)$$

la somme de I'

$$\mu_0 (|y\rangle + |-y\rangle) = \frac{2\mu_0}{\sqrt{2}} (|z\rangle)$$

$$\hat{\mu}_y |-z\rangle = -\mu_0 i |z\rangle$$

La matrice est donc

$$\hat{\mu}_y = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \hat{\sigma}_x ; \hat{\mu}_y = \mu_0 \hat{\sigma}_y ; \hat{\mu}_z = \mu_0 \hat{\sigma}_z$$

on note,

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_x \\ \hat{\mu}_y \\ \hat{\mu}_z \end{pmatrix}, \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix}$$

ce sont des vecteurs matrices, vecteurs d'opérateurs

d'où

$$\hat{\mu} = \mu_0 \hat{\sigma}$$

On a aussi les relations suivantes (les relations de commutation) :

$$[\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y] = 2i\mu_0 \hat{\mu}_z$$

$$[\hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z] = 2i\mu_0 \hat{\mu}_x$$

$$[\hat{\mu}_z, \hat{\mu}_x] = 2i\mu_0 \hat{\mu}_y$$

$$\hat{\mu} \wedge \hat{\mu} = 2i\mu_0 \hat{\mu}$$

Style Dirac

On peut refaire tous ces calculs avec le style de Dirac, c'est une bonne façon de manipuler les bra et les ket.

Pour ça on utilise l'identité suivante, valable pour un opérateur quelconque:

$$\hat{G} = \sum_i g_i |g_i\rangle\langle g_i|$$

La matrice $\hat{\mu}_z$

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 |z\rangle\langle z| - \mu_0 |-z\rangle\langle -z|$$

Pour trouver la matrice il suffit d'appliquer $\hat{\mu}_z$ sur $|z\rangle$ et $|-z\rangle$.

$$\hat{\mu}_z |z\rangle = \mu_0 |z\rangle\langle z|z\rangle - \mu_0 |-z\rangle\langle -z|z\rangle = \mu_0 |z\rangle$$

$$\hat{\mu}_z |-z\rangle = \mu_0 |z\rangle\langle z|-z\rangle - \mu_0 |-z\rangle\langle -z|-z\rangle = -\mu_0 |-z\rangle$$

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\hat{\mu}_x$

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 |x\rangle\langle x| - \mu_0 |-x\rangle\langle -x|$$

or on a

$$\begin{cases} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle) \\ |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - |-z\rangle) \end{cases}$$

$$|x\rangle\langle x| = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle z| + \langle -z|)$$

$$= \frac{1}{2} (|z\rangle\langle z| + |z\rangle\langle -z| + |-z\rangle\langle z| + |-z\rangle\langle -z|)$$

$$|-x\rangle\langle -x| = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - |-z\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle z| - \langle -z|)$$

$$= \frac{1}{2} (|z\rangle\langle z| - |z\rangle\langle -z| - |-z\rangle\langle z| + |-z\rangle\langle -z|)$$

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 |z\rangle\langle -z| + \mu_0 |-z\rangle\langle z|$$

donc si on applique $\hat{\mu}_x$, à $|z\rangle$ et $|-z\rangle$, autrement dit pour le 1er vecteur colonne on cherche le bra $\langle z|$, ça donne

$$\mu_0 |-z\rangle\langle z|$$

et pour le 2ème vecteur colonne on cherche le bra $\langle -z|$

ça donne

$$\mu_0 |z\rangle\langle -z|$$

donc

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\hat{\mu}_y$

$$\hat{\mu}_y = \mu_0 |y\rangle\langle y| - \mu_0 |-y\rangle\langle -y|$$

et on a

$$\begin{cases} |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + i|-z\rangle) \\ |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - i|-z\rangle) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |y\rangle\langle y| &= \frac{1}{2} (|z\rangle + i|-z\rangle) (\langle z| - i\langle -z|) \\ &= \frac{1}{2} (|z\rangle\langle z| - i|z\rangle\langle -z| + i|-z\rangle\langle z| + |-z\rangle\langle -z|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |-y\rangle\langle -y| &= \frac{1}{2} (|z\rangle - i|-z\rangle) (\langle z| + i\langle -z|) \\ &= \frac{1}{2} (|z\rangle\langle z| + i|z\rangle\langle -z| - i|-z\rangle\langle z| + |-z\rangle\langle -z|) \end{aligned}$$

$$\hat{\mu}_y = -\mu_0 i |z\rangle\langle -z| + \mu_0 i |-z\rangle\langle z|$$

et on lit

$$\hat{\mu}_y = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mu} = \mu_0 \hat{\sigma}$$

Ouff !!

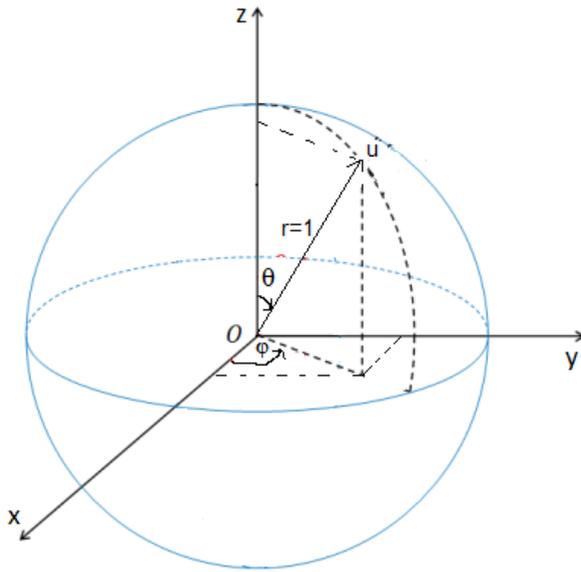
On a mesuré μ sur les axes x, y, z et si on le mesure maintenant sur un axe unitaire u quelconque ?

la composante de μ sur u est

$$\mu_u = \mu \cdot u = \mu_x u_x + \mu_y u_y + \mu_z u_z$$

puis en passant par des observables ça donne

$$\hat{\mu}_u = \hat{\mu} \cdot u = \hat{\mu}_x u_x + \hat{\mu}_y u_y + \hat{\mu}_z u_z$$



or

$$\begin{cases} u_x = \sin \theta \cos \varphi \\ u_y = \sin \theta \sin \varphi \\ u_z = \cos \theta \end{cases}$$

$\theta = \text{angle } (z, u)$

$$\begin{aligned} \hat{\mu} \cdot u = \mu_0 \sin \theta \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu_0 \sin \theta \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ + \mu_0 \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{\mu} \cdot \mathbf{u} = \mu_0 \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mu}_u = \mu_0 \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

on note aussi $\hat{\mu}_u = \hat{\mu}_{\theta, \varphi}$

$$\hat{\mu}_u = \mu_0 |u\rangle\langle u| - \mu_0 |-u\rangle\langle -u|$$

Les vecteurs propres de $\hat{\mu}_u$

$$|u\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |z\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |-z\rangle$$

$$|-u\rangle = \sin \frac{\theta}{2} |z\rangle - e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} |-z\rangle$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} - \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On voit que l'état propre $|u\rangle$ correspond à un point $M(\theta, \varphi)$ sur le sphère de Bloch

$$|u\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |z\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |-z\rangle$$

Cherchons la valeur moyenne de $\hat{\mu}_z$ sur u

$$\langle \hat{\mu}_z \rangle = \langle u | \hat{\mu}_z | u \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos \theta
\end{aligned}$$

6.3 LE SPIN 1/2

Une particule élémentaire possède une caractéristique intrinsèque nommée spin s , comme la charge q , la masse m , la fréquence ν ,

Les spins sont en entier s ou demi-entier $(s+\frac{1}{2})$

$$s = \begin{cases} 0, 1, 2, 3, \dots & \text{entier} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots & \text{demi-entier} \end{cases}$$

Note : il faut dire plutôt $s\hbar$ ou $(s+\frac{1}{2})\hbar$ mais on omet souvent \hbar

Bosons : spin entier 0, 1, 2, 3, ...

Fermions : spin demi-entier $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Spin = 0 , boson de Higgs

Spin = $\frac{1}{2}$, électron, proton, neutron, quark

Spin = 1 , photon, gluon

Spin = 2 , graviton (hypothétique)

L'électron, le proton, le neutron, ... ont un spin 1/2, à partir du nombre de valeur spin s , on associe une grandeur physique S_z nommée le spin suivant l'axe z , cette grandeur ne prend que deux valeurs $\frac{\hbar}{2}$ ou $-\frac{\hbar}{2}$ et

l'observable associé \hat{S}_z a donc deux valeurs propres $\pm \frac{\hbar}{2}$ correspondant aux vecteurs propres $|z\rangle$ et $|-z\rangle$ c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_z |z\rangle = \frac{\hbar}{2} |z\rangle \\ \hat{S}_z |-z\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-z\rangle \end{array} \right.$$

On définit de même pour les observables \hat{S}_x , \hat{S}_y suivant l'axe x et y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_x |x\rangle = \frac{\hbar}{2} |x\rangle \\ \hat{S}_x |-x\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-x\rangle \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_y |y\rangle = \frac{\hbar}{2} |y\rangle \\ \hat{S}_y |-y\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-y\rangle \end{array} \right.$$

À chaque fois qu'on a un moment cinétique-spin \hat{S} (on dira simplement spin), on peut lui associer un moment magnétique-spin $\hat{\mu}_s$ comme dans le cas un moment cinétique orbital \hat{L} on a un moment magnétique orbital $\hat{\mu}_L = \gamma_L \hat{L}$ associé, on stipule donc

$$\hat{\mu}_s = \gamma_s \hat{S}$$

Donc un moment magnétique (total) $\hat{\mu}$ peut provenir de $\hat{\mu}_L$ ou $\hat{\mu}_s$

ou les deux

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S$$

Dans l'expérience de Stern-Gerlach, le moment magnétique $\hat{\mu}$ de l'atome d'argent provient seulement du moment magnétique spin $\hat{\mu}_S$ de l'électron de valence du atome d'argent, car $\hat{L} = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_L = 0$, en clair $\hat{\mu}$ provient du spin en fait.

Pour une particule quelconque :

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S$$

$$\text{où } \hat{\mu}_S = \gamma_S \hat{S} \text{ et } \hat{\mu}_L = \gamma_L \hat{L}$$

Pour :

$$\text{l'électron } \gamma_S = -\frac{q}{m_e}$$

$$\text{le proton } \gamma_S = 2,79 \frac{q}{m_e} = 5,58 \frac{q}{2m_p}$$

$$\text{le neutron } \gamma_S = -1,91 \frac{q}{m_e} = -3,82 \frac{q}{2m_p}$$

Comme

$$\hat{S}_z |z\rangle = \frac{\hbar}{2} |z\rangle$$

$$\hat{S}_z |-z\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-z\rangle$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$$

$$\begin{cases} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle) \\ |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - |-z\rangle) \end{cases}$$

$$\square \hat{S}_x |x\rangle = \frac{\hbar}{2} |x\rangle$$

$$\hat{S}_x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle) \right) = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + |-z\rangle)$$

$$\hat{S}_x (|z\rangle + |-z\rangle) = \frac{\hbar}{2} (|z\rangle + |-z\rangle)$$

$$\hat{S}_x |z\rangle + \hat{S}_x |-z\rangle = \frac{\hbar}{2} (|z\rangle + |-z\rangle)$$

$$\square \hat{S}_x |-x\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-x\rangle$$

$$\hat{S}_x |z\rangle - \hat{S}_x |-z\rangle = -\frac{\hbar}{2} (|z\rangle - |-z\rangle)$$

$$\hat{S}_x |z\rangle = \frac{\hbar}{2} (|-z\rangle)$$

$$\hat{S}_x |-z\rangle = \frac{\hbar}{2} (|z\rangle)$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x$$

$$\begin{cases} |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + i|-z\rangle) \\ |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle - i|-z\rangle) \end{cases}$$

$$\hat{S}_y |y\rangle = \frac{\hbar}{2} |y\rangle$$

$$\hat{S}_y \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + i|-z\rangle) \right) = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|z\rangle + i|-z\rangle)$$

$$\hat{S}_y |z\rangle + i\hat{S}_y |-z\rangle = \frac{\hbar}{2} (|z\rangle + i|-z\rangle)$$

$$\hat{S}_y |-y\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-y\rangle$$

$$\hat{S}_y |z\rangle - i\hat{S}_y |-z\rangle = -\frac{\hbar}{2} (|z\rangle - i|-z\rangle)$$

$$\hat{S}_y |z\rangle = \frac{\hbar}{2} (i|-z\rangle)$$

$$\hat{S}_y |-z\rangle = \frac{\hbar}{2} (-i|z\rangle)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y$$

finalement

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$$

rappel les vecteur matrices:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_x \\ \hat{\mu}_y \\ \hat{\mu}_z \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix}$$

Cherchons que vaut μ_0 , pour l'électron on a : $\gamma_S = -\frac{q}{m_e}$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_S = \mu_0 \hat{\sigma} \\ \hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \end{cases}$$

$$\hat{\mu}_S = \mu_0 \frac{2}{\hbar} \hat{S}$$

$$\hat{\mu}_S = \gamma_S \hat{S}$$

comme $\mu_0 > 0$ d'où

$$\mu_0 \frac{2}{\hbar} = |\gamma_S|$$

$$\mu_0 = \frac{q\hbar}{2m_e}$$

On note aussi

$$\frac{q\hbar}{2m_e} = \mu_B$$

μ_B = le magnéton de Bohr

Et l'expérience vérifie bien la valeur de μ_0 .

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$$

$$\hat{\sigma} \wedge \hat{\sigma} = 2i \hat{\sigma}$$

$$\frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \wedge \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} = 2i \frac{\hbar}{2} \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$$

$$\hat{S} \wedge \hat{S} = i\hbar \hat{S}$$

\hat{S} vérifie la relation de commutation, d'où

$$\hat{S}^2 |u\rangle = s(s+1)\hbar^2 |u\rangle ; \text{ où } s \text{ est un entier, ou demi-entier}$$

$$\hat{S}_z |u\rangle = m_s \hbar |u\rangle ; \text{ où } m_s \text{ est un entier, ou demi-entier}$$

$$s = \begin{cases} 0,1,2,3, \dots & \text{entier} \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots & \text{demi-entier} \end{cases}$$

→ Si s est entier alors m_s est entier

→ Si s est demi-entier alors m_s est demi-entier

et m_s prend les valeurs suivantes

$$m = s, s-1, s-2, \dots, -s$$

$$\text{donc } \dim \mathcal{H} = 2s+1$$

Pour un électron s est demi-entier et vaut $s = \frac{1}{2}$ et $m_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

$$\hat{S}^2 |u\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |u\rangle$$

$$\hat{S}_z |u\rangle = \frac{\hbar}{2} |u\rangle$$

$$\hat{S}_z | -u \rangle = -\frac{\hbar}{2} | -u \rangle$$

6.4 ROTATION DANS \mathbb{R}^3 ET LE SPIN

Soit l'état $|s\rangle$ dans l'espace des spins \mathcal{H} défini par :

$$|s\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |z\rangle + \sin\frac{\theta}{2} | -z \rangle$$

l'état $|s\rangle$ correspond à u dans \mathbb{R}^3 , c'est la résultat de la rotation autour de y du vecteur z d'un angle $\theta = (\widehat{z}, \widehat{u})$

On note $\widehat{R}_{\theta,y}$ rotation d'angle $\theta = (\widehat{z}, \widehat{u})$ autour d'axe y

$$\widehat{R}_{\theta,y} |z\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |z\rangle + \sin\frac{\theta}{2} | -z \rangle$$

$$\widehat{R}_{\theta,y} | -z \rangle = -\sin\frac{\theta}{2} |z\rangle + \cos\frac{\theta}{2} | -z \rangle$$

$$\widehat{R}_{\theta,y} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Attention : $\widehat{R}_{\theta,y}$ est simplement un opérateur, il n'est pas autoadjoint !! mais il est unitaire

La famille $\{\widehat{R}_{\theta,y}\}_{0 \leq \theta < \pi}$ engendre un observable comme d'habitude :

$$\widehat{R}_{\theta,y} = e^{-\frac{i\theta}{\hbar} \hat{S}_y}$$

ou encore si $\theta \ll 1$; θ très petit devant 1

$$\widehat{R}_{\theta,y} = \widehat{I} - \frac{i\theta}{\hbar} \widehat{S}_y$$

Attention : $\widehat{R}_{\theta,y}$ n'est pas autoadjoint !! par contre \widehat{S}_y est autoadjoint (= observable).

On définit de même pour les autres axes x, z

$$\widehat{R}_{\theta,x} = e^{-\frac{i\theta}{\hbar} \widehat{S}_x}$$

$$\widehat{R}_{\theta,x} = \widehat{I} - \frac{i\theta}{\hbar} \widehat{S}_x ; \theta \ll 1$$

$$\widehat{R}_{\theta,z} = e^{-\frac{i\theta}{\hbar} \widehat{S}_z}$$

$$\widehat{R}_{\theta,z} = \widehat{I} - \frac{i\theta}{\hbar} \widehat{S}_z ; \theta \ll 1$$

et pour une rotation d'angle θ , autour d'axe u

$$\widehat{R}_{\theta,u} = e^{-\frac{i\theta}{\hbar} u \cdot \widehat{J}}$$

$$u \cdot \widehat{J} = u_x \widehat{J}_x + u_y \widehat{J}_y + u_z \widehat{J}_z$$

$$\widehat{R}_{\theta,u} = \widehat{I} - \frac{i\theta}{\hbar} u \cdot \widehat{J} ; \theta \ll 1$$

Remarque : on a la relation suivante:

$$e^{i\theta \widehat{A}} = \cos\theta \widehat{I} + i \sin\theta \widehat{A}$$

$$\rightarrow \exp \begin{pmatrix} 0 & i\theta \\ i\theta & 0 \end{pmatrix} = \exp i\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & i\theta \\ i\theta & 0 \end{pmatrix} = \cos\theta \hat{I} + i \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & i \sin\theta \\ i \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \exp i\theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \cos\theta \hat{I} + i \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \exp\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} = \exp i\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} = \cos\theta \hat{I} + i \sin\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

7 LE QUBIT

Un qubit (quantique binaire) est un système Γ simple ayant deux états à valeur bien définies, on les note $|0\rangle$ et $|1\rangle$, et ces deux vecteurs forment une base orthonormées, donc l'espace des états d'un qubit est un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension 2. Les états s'écrivent alors :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

comme les états $|\psi\rangle$ et $\lambda|\psi\rangle$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ donnent le même état physique, on peut donc travailler sur les vecteurs normés c'est-à-dire exiger $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

or

$$\alpha = r e^{ia} ; r > 0, a \in [0, 2\pi[$$

$$\beta = \rho e^{ib} ; \rho > 0, b \in [0, 2\pi[$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow |r|^2 + |\rho|^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \cos \mu \\ \rho = \sin \mu \end{cases} \text{ où } 0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}$$

$$|\psi\rangle = \cos \mu e^{ia} |0\rangle + e^{ib} \sin \mu |1\rangle$$

$$e^{-ia} |\psi\rangle = \cos \mu |0\rangle + e^{i(b-a)} \sin \mu |1\rangle$$

on pose $b-a = \varphi \in [0, 2\pi[$ donc on a le même état

$$|\psi\rangle = \cos \mu |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \mu |1\rangle$$

avec $\mu \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ et si on pose $2\mu = \theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$

soit

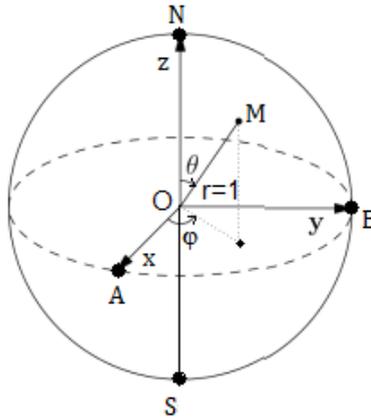
$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle$$

7.1 LA SPHÈRE DE BLOCH

La sphère de Bloch est la sphère unité $r=1$ de \mathbb{R}^3

$$M = \begin{cases} x = \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq \varphi < 2\pi$$



La sphère de Bloch

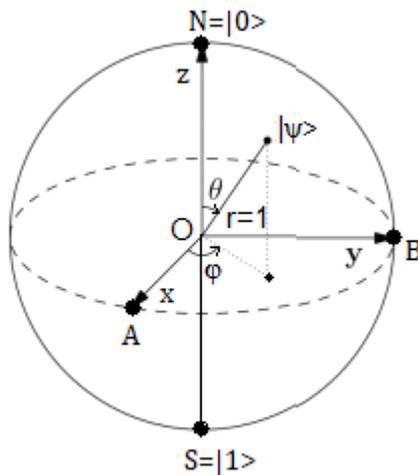
On voit donc qu'on peut associer un état $|\psi\rangle$ à un point M de la sphère de Bloch

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} |1\rangle \Rightarrow$$

$$M = \begin{cases} x = \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

Un état $|\psi\rangle$ correspond en quelque sorte une direction $u \in \mathbb{R}^3$ de l'espace physique \mathbb{R}^3

On peut chercher les points sur le sphère de Bloch pour un certains ket donnés,



par ex:

le point N (Nord) correspond à $\theta=0, \varphi=0$

$$|N\rangle = |0\rangle$$

le point S (Sud) correspond à $\theta=\pi, \varphi=0$

$$|S\rangle = |1\rangle$$

le point A correspond à $\theta=\frac{\pi}{2}, \varphi=0$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

On note A' le point diamétralement opposé de A. Pour trouver A' on descend OM sur Ox et on tourne Ox d'angle π , donc A' correspond à $\theta=\frac{\pi}{2}, \varphi=\pi$

$$|A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Pour le point B on descend OM sur Ox et on tourne Ox d'angle $\frac{\pi}{2}$, le point B correspond à $\theta=\frac{\pi}{2}, \varphi=\frac{\pi}{2}$

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

Pour B', on descend OM sur Ox et on tourne Ox d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc le point B' correspond à $\theta=\frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2}$

$$|B'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

On peut remarquer que deux points diamétralement opposés ont des kets orthogonaux, par ex pour A et A'

$$\langle A|A' \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$$

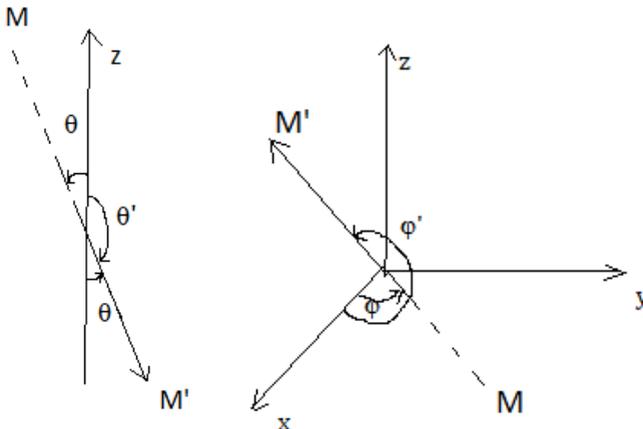
$$\langle B|B' \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$$

Voyons pour $M(\theta, \varphi)$ et $M'(\theta', \varphi')$, deux points diamétralement opposés

$$|M\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$$|M'\rangle = \cos\frac{\theta'}{2} |0\rangle + e^{i\varphi'} \sin\frac{\theta'}{2} |1\rangle$$

Pour trouver M' il suffit de tourner la sphère dans une direction adéquat car l'espace est isotope (pas de direction privilégiée)



$$\theta' = \pi - \theta$$

$$\varphi' = \pi + \varphi$$

$$|M'\rangle = \cos\frac{\pi-\theta}{2} |0\rangle + e^{i(\pi+\varphi)} \sin\frac{\pi+\varphi}{2} |1\rangle$$

$$|M'\rangle = \sin\frac{\theta}{2} |0\rangle - e^{i\varphi} \cos\frac{\varphi}{2} |1\rangle$$

$$\langle M|M'\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2} \quad e^{-i\varphi} \sin\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = 0$$

Les observables de \mathcal{H}

On peut représenter un observable \hat{A} de \mathcal{H} par une matrice 2×2 à coefficients complexes.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

or

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger = {}^t \hat{A}^*$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha^* \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \\ \delta = \delta^* \Rightarrow \delta \in \mathbb{R} \\ \beta = \gamma^* \end{cases}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^* \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \delta \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{C}$$

on pose

$$a = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

$$d = \frac{\alpha - \delta}{2}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a + d & b - ic \\ b + ic & a - d \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

coupons \hat{A} en plusieurs morceaux

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a + d & b - ic \\ b + ic & a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a - d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b - ic \\ b + ic & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on pose

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ces matrices se nomment les matrices de Pauli

$$\hat{A} = a\hat{1} + b\hat{\sigma}_x + c\hat{\sigma}_y + d\hat{\sigma}_z$$

On voit donc que tous les observables du qubit sont exprimés par les observables de Pauli (les matrices de Pauli)

Les valeurs propres de σ_i sont données par

$$\lambda^2 + \text{tr}(\sigma_i)\lambda + \text{dét}(\sigma_i) = 0$$

$$\text{tr}(\sigma_i) = 0$$

$$\det(\sigma_i) = -1$$

d'où

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{valeurs propres } \lambda=1 \text{ ou } \lambda=-1$$

vecteurs propres

Pour $\hat{\sigma}_x$

$$\lambda=1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |0\rangle + |1\rangle$$

$$\lambda=-1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |0\rangle - |1\rangle$$

Pour $\hat{\sigma}_y$

$$\lambda=1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -iy = x \\ ix = y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow |0\rangle + i|1\rangle$$

$$\lambda=-1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -iy = -x \\ ix = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow |0\rangle - i|1\rangle$$

Pour $\hat{\sigma}_z$

$$\lambda=1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ -y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |0 \rangle$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -x \\ -y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |1 \rangle$$

On a aussi les relations suivantes:

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$$

$$[\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2i\hat{\sigma}_x$$

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y$$

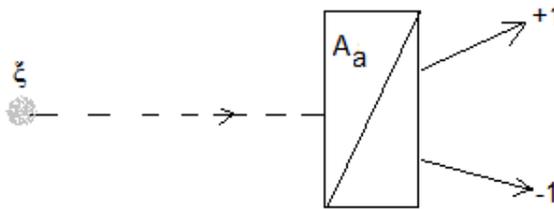
on note $\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix}$

$$\hat{\sigma} \wedge \hat{\sigma} = 2i\hat{\sigma}$$

8 LE PARADOXE EPR ET L'INÉGALITÉ DE BELL

8.1 L'ALÉATOIRE

Quand on mesure la polarisation d'un photon ξ par un polariseur A_a (suivant la direction a) on a aléatoirement le résultat $+1$ ou -1



Le caractère aléatoire des résultats d'une expérience ou d'une mesure a profondément troublé Einstein, il pense que le monde est déterministe et que la physique quantique n'est pas complète, il manque quelque chose que le formalisme quantique ne tient pas compte et c'est ça qui rend aléatoire des résultats des mesures.

Dans l'exemple ci-dessus, pour Einstein le photon ξ porte en lui un gène génétique disons λ qui code tous les réactions à prendre quand le photon est en face d'un polariseur A_a , par ex:

$\lambda = 1001011 \dots$

qui signifie :

- Quand le photon rencontre le polariseur A_a il sort en +1
- Quand le photon rencontre le polariseur A_b il sort en -1
- Quand le photon rencontre le polariseur A_c il sort en -1
- Quand le photon rencontre le polariseur A_d il sort en +1
- Quand le photon rencontre le polariseur A_e il sort en -1
- Quand le photon rencontre le polariseur A_f il sort en +1
- Quand le photon rencontre le polariseur A_g il sort en +1

.....

Le résultat de la mesure est déterministe (quand le photon rencontre le polariseur A_f par ex, on est sûr d'avoir le résultat +1), et comme le formalisme de la physique quantique ne tient pas compte de la variable cachée λ elle est donc incomplète !!

Bohr n'est pas du tout de cet avis, pour lui c'est au contraire le caractère aléatoire des résultats des mesures est intrinsèque à la nature, la physique quantique est complète il n'y a rien à compléter ! , le photon n'a pas de gène génétique λ donc en face d'un polariseur il réagit de façon aléatoire !

Pour convaincre Bohr, Einstein et ses collaborateurs Podolsky et Rosen , écrivent (en 1935) un article nommé

EPR qui vise à démontrer la incomplétude de la physique quantique.

8.2 LE PARADOXE EPR

Lorsqu'on fait de la physique quantique, tôt ou tard on entend l'expression : "le paradoxe EPR" de quoi s'agit-il ? Pour simplifier, on prend deux particules ξ_1, ξ_2 caractérisées par une même grandeur G qui ne peut prendre que deux valeurs $+1$ ou -1 , puis on fait intriquer ces deux particules et les s'éloigne d'une distance D .

* On mesure ξ_1 et on dresse une liste L_1 , les résultats de la mesure sont aléatoires.

* De même on mesure ξ_2 et on dresse une liste L_2 , les résultats de la mesure sont aussi aléatoires.

* Puis on compare la liste L_1 avec la liste L_2 et on trouve il y a parfaitement une corrélation !

par ex:

L_1	L_2
+1	+1
-1	-1
-1	-1
+1	+1
-1	-1
+1	+1

+1	+1
...	...

Ce qui est vraiment étrange car les résultats des mesures de ξ_1 et ξ_2 sont aléatoires.

Cette corrélation signifie que quand on connaît le résultat de ξ_1 par ex $\xi_1=1$, on connaît forcément le résultat de $\xi_2=1$ même si on ne le mesure pas, ceci contredit un principe de la PQ : avant la mesure de ξ_2 , ξ_2 est dans un état de superposition

$$|\psi\rangle = \alpha|+1\rangle + \beta|-1\rangle \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

c'est ici qu'on a le paradoxe.

On peut tenter d'expliquer qu' au moment de la mesure de ξ_1 , ξ_1 a envoyé un message à ξ_2 pour dire qu'il est en "+1" donc ξ_2 doit se mettre en position "+1" aussi, mais le message doit mettre un certain temps pour arriver jusqu'à ξ_2 or la corrélation est instantané ceci contredit la relativité restreinte, donc cette explication est rejetée.

Bohr ne donne pas vraiment l'explication il dit simplement lorsque les particules ξ_1 , ξ_2 sont intriquées ils forment un seul système $\{\xi_1, \xi_2\}$ il n'y a plus deux systèmes (particules) individuels $\{\xi_1\}$, $\{\xi_2\}$. Le résultat $\xi_1=1$ quand on mesure ξ_1 , c'est simplement le résultat qu'on mesure sur le système $\{\xi_1, \xi_2\}$ pour une grandeur F qui caractérise le système $\{\xi_1, \xi_2\}$ et non la grandeur G, puisque les particules ξ_1 , ξ_2 n'existent plus !!!

Pour Einstein, il n'y a pas de corrélation !! les résultats des mesures sont fixés, déterminés . Chaque particule possède une variable cachée et qui ont des valeurs déterminées lorsque ces deux particules sont intriquées.

$\xi_1: \lambda_1 = 1001011 \dots$

$\xi_2: \lambda_2 = 1001011 \dots$

Comme on ne connaît pas les λ , on a l'impression que les résultats des mesures sont aléatoires , en réalité ces résultats sont déterminés et pas de corrélation.

Conclusion : Le formaliste quantique est incomplet car il ne décrit pas les variables cachées λ .

Remarque : on a : $\{\xi_1, \xi_2\}$ et non $\{\{\xi_1\}, \{\xi_2\}\} \Rightarrow \{\xi_1\}, \{\xi_2\}$ ne sont pas de sous-systèmes de $\{\xi_1, \xi_2\}$

Et chacun restait dans leur camp ainsi jusqu'à leur mort (Einstein 1955, Bohr 1962)

Vers 1964 , 30 ans après EPR, John Bell décide de mettre tout ça en clair, il prend une année sabbatique pour réfléchir au problème. Il pense comme Einstein, c'est-à-dire la physique quantique est incomplète, il faut donc la compléter.

Bell va mettre toutes les idées d'Einstein en langage mathématique et il arrive avec ce qu'on appelle aujourd'hui les inégalités de Bell.

Pour simplifier nous donnons une version moderne de l'expérience EPR qui conduit directement à l'une des

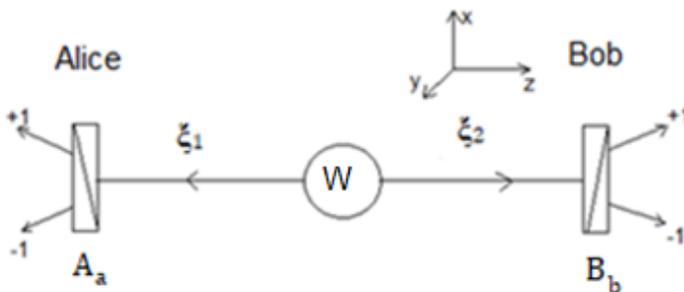
inégalités de Bell : une paire de photons intriqués en polarisation.

Considérons l'expérience suivante:

Une source W délivre une paire de photon (ξ_1, ξ_2) s'éloignant dans les directions opposées suivant z et que cette paire de photons est dans l'état de polarisation intriqué $|EPR\rangle$:

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle + |y_1\rangle \otimes |y_2\rangle)$$

où $|x_1\rangle, |y_1\rangle$ désignent la polarisation horizontale, verticale du photon ξ_1 et ils forment une base de l'espace de Hilbert de la polarisation de ξ_1 . De même pour le photon ξ_2 ($x_2//x_1$ et $y_2//y_1$ et $|y_1\rangle, |y_2\rangle$ base de l'espace de Hilbert de la polarisation de ξ_2)



expérience EPR

Alice effectue une mesure de polarisation du photon ξ_1 par le polariseur A_a (suivant la direction a), si le photon sort

du canal +1 il est polarisé suivant a, s' il sort du canal -1 il est polarisé suivant a^\perp .

De même pour Bob, il effectue une mesure de polarisation du photon ξ_2 par le polariseur B_b (suivant la direction b), si le photon sort du canal +1 il est polarisé suivant b, s' il sort du canal -1 il est polarisé suivant b^\perp .

On s'intéresse aux probabilités suivantes:

$p_+(a)$ = la probabilité que le photon ξ_1 sort du canal +1

$p_-(a)$ = la probabilité que le photon ξ_1 sort du canal -1

$p_+(b)$ = la probabilité que le photon ξ_2 sort du canal +1

$p_-(b)$ = la probabilité que le photon ξ_2 sort du canal -1

$p_{++}(a,b)$ = la probabilité que le photon ξ_1 sort du canal +1 et ξ_2 du canal +1

$p_{+-}(a,b)$ = la probabilité que le photon ξ_1 sort du canal +1 et ξ_2 du canal -1

$p_{-+}(a,b)$ = la probabilité que le photon ξ_1 sort du canal -1 et ξ_2 du canal +1

$p_{--}(a,b)$ = la probabilité que le photon ξ_1 sort du canal -1 et ξ_2 du canal -1

On a les relation suivantes :

$$\begin{cases} |x_1\rangle = \cos\alpha |a\rangle - \sin\alpha |a^\perp\rangle \\ |y_1\rangle = \sin\alpha |a\rangle + \cos\alpha |a^\perp\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x_2\rangle = \cos\beta |b\rangle - \sin\beta |b^\perp\rangle \\ |y_2\rangle = \sin\beta |b\rangle + \cos\beta |b^\perp\rangle \end{cases}$$

avec $\alpha = (\widehat{x_1}, \widehat{a})$, $\beta = (\widehat{x_2}, \widehat{b})$, $\mu = (\widehat{a}, \widehat{b})$

Exprimons l'état $|EPR\rangle$ dans les nouvelles bases a, b

$$|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle$$

$$= (\cos\alpha |a\rangle - \sin\alpha |a^\perp\rangle)(\cos\beta |b\rangle - \sin\beta |b^\perp\rangle)$$

$$= \cos\alpha \cos\beta |a\rangle \otimes |b\rangle - \cos\alpha \sin\beta |a\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

$$- \sin\alpha \cos\beta |a^\perp\rangle \otimes |b\rangle + \sin\alpha \sin\beta |a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

$$|y_1\rangle \otimes |y_2\rangle$$

$$= (\sin\alpha |a\rangle + \cos\alpha |a^\perp\rangle)(\sin\beta |b\rangle + \cos\beta |b^\perp\rangle)$$

$$= \sin\alpha \sin\beta |a\rangle \otimes |b\rangle + \sin\alpha \cos\beta |a\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

$$+ \cos\alpha \sin\beta |a^\perp\rangle \otimes |b\rangle + \cos\alpha \cos\beta |a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

d'où

$$= (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) |a\rangle \otimes |b\rangle$$

$$+ (\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta) |a\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

$$+ (\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta) |a^\perp\rangle \otimes |b\rangle$$

$$+ (\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta) |a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

soit

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\beta - \alpha) |a\rangle \otimes |b\rangle$$

$$- \sin(\beta - \alpha) |a\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

$$+ \sin(\beta - \alpha) |a^\perp\rangle \otimes |b\rangle$$

$$+ \cos(\beta - \alpha) |a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle]$$

$$|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\mu) |a\rangle \otimes |b\rangle$$

$$- \sin(\mu) |a\rangle \otimes |b^\perp\rangle$$

$$+ \sin(\mu) |a^\perp\rangle \otimes |b\rangle$$

$$+ \cos(\mu) |a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle]$$

$$p_+(a) = \text{prob}(|a\rangle \otimes |b\rangle) + \text{prob}(|a\rangle \otimes |b^\perp\rangle)$$

$$= \frac{1}{2} \cos^2 \mu + \frac{1}{2} \sin^2 \mu = \frac{1}{2}$$

$$p_-(a) = \text{prob}(|a^\perp\rangle \otimes |b\rangle) + \text{prob}(|a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \mu + \frac{1}{2} \cos^2 \mu = \frac{1}{2}$$

$$p_+(b) = \text{prob}(|a\rangle \otimes |b\rangle) + \text{prob}(|a^\perp\rangle \otimes |b\rangle)$$

$$= \frac{1}{2} \cos^2 \mu + \frac{1}{2} \sin^2 \mu = \frac{1}{2}$$

$$p_-(b) = \text{prob}(|a\rangle \otimes |b^\perp\rangle) + \text{prob}(|a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \mu + \frac{1}{2} \cos^2 \mu = \frac{1}{2}$$

et

$$p_{++}(a,b) = \text{prob}(|a\rangle \otimes |b\rangle) = \frac{1}{2} \cos^2 \mu$$

$$p_{--}(a,b) = \text{prob}(|a^\perp\rangle \otimes |b^\perp\rangle) = \frac{1}{2} \cos^2 \mu$$

$$p_{+-}(a,b) = \text{prob}(|a\rangle \otimes |b^\perp\rangle) = \frac{1}{2} \sin^2 \mu$$

$$p_{-+}(a,b) = \text{prob}(|a^\perp\rangle \otimes |b\rangle) = \frac{1}{2} \sin^2 \mu$$

Finalement le formalisme quantique donne:

$$\text{I} \begin{cases} p_+(a) = p_+(b) = \frac{1}{2} \\ p_-(a) = p_-(b) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} p_{++}(a,b) = p_{--}(a,b) = \frac{1}{2} \cos^2 \mu \\ p_{+-}(a,b) = p_{-+}(a,b) = \frac{1}{2} \sin^2 \mu \end{cases}$$

On pose

$$E(a,b) = p_{++}(a,b) + p_{--}(a,b) - p_{+-}(a,b) - p_{-+}(a,b)$$

$E(a,b)$ se nomme le coefficient de corrélation, avec les formules ci-dessus on trouve

$$E(a,b) = \frac{1}{2} \cos^2 \mu + \frac{1}{2} \cos^2 \mu - \frac{1}{2} \sin^2 \mu - \frac{1}{2} \sin^2 \mu$$

$$E(a,b) = \cos^2 \mu - \sin^2 \mu = 2 \cos^2 \mu - 1 = \cos 2\mu$$

$$E(a,b) = \cos 2\mu$$

Posons

$$S(a,a',b,b') = E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b')$$

Commentaire :

Quand on mesure la polarisation du photon seul ξ par un polariseur A_a , si le photon est dans l'état

$$|u\rangle = \cos\theta |x\rangle + \sin\theta |y\rangle$$

alors la probabilité que le photon sort du canal +1 est

$$\text{prob}(+) = \cos^2(\theta - \alpha)$$

du canal -1 est

$$\text{prob}(-) = \sin^2(\theta - \alpha)$$

or les résultats

$$\forall a, b \begin{cases} p_+(a) = p_+(b) = \frac{1}{2} \\ p_-(a) = p_-(b) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

montrent que, comme si les photons intriqués ξ_1 et ξ_2 n'ont pas de polarisation avant de rentrer dans les polariseurs !!

8.3 UNE CORRÉLATION PARFAIT

Examinons le cas particulier $a=b$, $\mu=0$, Il devient

$$\text{II} \begin{cases} p_{++}(a, b) = p_{--}(a, b) = \frac{1}{2} \\ p_{+-}(a, b) = p_{-+}(a, b) = 0 \end{cases}$$

Si Alice trouve +1 pour le photon ξ_1 , alors Bob trouve obligatoirement aussi +1 pour le photon ξ_2 car $p_{+-}(a,b)=0$

Ou si Alice trouve -1 pour le photon ξ_1 , alors Bob trouve obligatoirement aussi -1 pour le photon ξ_2 car $p_{-+}(a,b)=0$

Ceci est valable même si ξ_1 et ξ_2 sont très loin l'un de l'autre.

C'est assez perturbant, la question est la suivante: comment le photon ξ_1 pour lequel une polarisation +1 a été mesurée fait-il pour "prévenir" le photon ξ_2 qu'il doit sortir dans la canal +1 ? S'il lui doit envoyer un message par un moyen quelconque inconnu mais une chose est certaine : ce message ne peut se déplacer plus vite que la lumière.

Que fait-on ? Eh bien Bob va mesurer le photon ξ_2 tout juste après Alice mesurait ξ_1 .

Supposons que les polariseurs A_a et B_a sont séparés d'une distance D , le temps que la lumière met pour aller de A_a à B_a est

$$\tau = D/c$$

Alice mesure ξ_1 à l'instant t , et Bob va mesurer ξ_2 à l'instant t' tel que

$$t' - t < \tau$$

Dans ce cas ξ_2 n'a pas pu être "prévenu" par ξ_1 .

Le résultat de l'expérience est sans appel: la mesure du photon ξ_2 est toujours en corrélation avec ξ_1 ! Il n'y a donc pas de "message" envoyé par le photon ξ_1 , le système est un tout $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$, si on le perturbe à un endroit tout son état change instantanément et spatialement. Ce résultat est très perturbant pour notre esprit classique.

Pour Einstein cette corrélation est facile à expliquer, en effet pour Einstein les photons ξ_1 et ξ_2 ont un gène génétique commun λ dès la sortie de W , ce n'est pas étonnant qu'ils se comportent de la même façon. C'est pourquoi Einstein proposait de compléter le formalisme quantique par des variables cachées ainsi rendrait la mesure quantique déterministe.

8.4 UNE INÉGALITÉ DE BELL

Voyons ce qui se passe si on complète le formalisme quantique par les variables cachées λ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,

Compléter les variables cachées λ c'est la donnée de trois fonctions :

→ $A(a, \lambda)$ la fonction qui donne le résultat du mesure du photon par le polariseur A_a , le résultat est ± 1 suivant λ est dans $E_a \subset \mathbb{R}$ ou non, autrement dit λ dépend de a .

$$A(a, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in E_a \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

De même pour B_b

→ $B(b, \lambda)$ la fonction qui donne le résultat du mesure du photon par le polariseur B_b , le résultat est ± 1 suivant λ est dans $E_b \subset \mathbb{R}$ ou non, autrement dit λ dépend de b .

$$B(b, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in E_b \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme λ est distribué au hasard, on doit donc avoir une densité de probabilité $\rho(\lambda)$ telle que

$$\rightarrow \forall \lambda, \rho(\lambda) \geq 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) d\lambda = 1$$

Remarque : $A(a, \lambda)$ ne dépend pas de b (le polariseur B_b), et que $B(b, \lambda)$ ne dépend pas de a (le polariseur A_a).

On définit alors les fonctions suivantes :

$$E(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(a, \lambda) B(b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

et

$$s(a, a', b, b', \lambda) = A(a, \lambda) B(b, \lambda) - A(a, \lambda) B(b', \lambda) + A(a', \lambda) B(b, \lambda) + A(a', \lambda) B(b', \lambda)$$

le tableau suivant donne les valeurs de s

$A(a, \lambda)$	$A(a', \lambda)$	$B(b, \lambda)$	$B(b', \lambda)$	$s(a, a', b, b', \lambda)$
1	1	1	1	2
1	1	1	-1	2
1	1	-1	1	-2

1	1	-1	-1	-2
1	-1	1	1	-2
1	-1	1	-1	2
1	-1	-1	1	-2
1	-1	-1	-1	2
-1	1	1	1	2
-1	1	1	-1	-2
-1	1	-1	1	2
-1	1	-1	-1	-2
-1	-1	1	1	-2
-1	-1	1	-1	-2
-1	-1	-1	1	2
-1	-1	-1	-1	2

et la moyenne de $s(a,a',b',\lambda)$ est, par définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(a, a', b, b', \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

on a

$s(a,a',b',\lambda) = \pm 2$ donc sa moyenne est entre -2 et +2

$$-2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} s(a, a', b, b', \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \leq 2$$

soit

$$-2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(b', \lambda) + A(a', \lambda)B(b, \lambda) + A(a', \lambda)B(b', \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \leq 2$$

$$-2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda) - A(a, \lambda)B(b', \lambda)\rho(\lambda) + A(a', \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda) + A(a', \lambda)B(b', \lambda)\rho(\lambda)] d\lambda \leq 2$$

$$-2 \leq E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') \leq 2$$

$$-2 \leq S(a, a', b, b') \leq 2$$

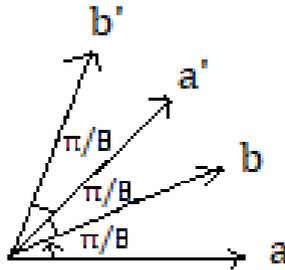
$$|S(a, a', b, b')| \leq 2$$

Résumons :

$S = E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')$ formalisme quantique

$-2 \leq S \leq 2$ formalisme quantique avec les variables cachées

Il suffit alors de prendre les vecteurs a, a', b, b' comme indique la fig ci-dessous



$$E(a,b) = \cos 2\mu$$

$$S = \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

d'où

$$S = 2\sqrt{2} > 2 \text{ pas de variables cachées}$$

$$S \leq 2 \text{ avec des variables cachées}$$

Il suffit maintenant de faire l'expérience et voir si S respecte ou non cette inégalité de Bell .

Il fallait attendre jusqu'en 1982 que l'équipe Alain Aspect réalise cette expérience et trouve

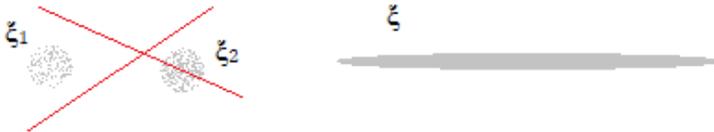
$$S = 2,7 > 2 \Rightarrow \text{pas de variables cachées}$$

donc la physique quantique est complète !! Bohr a raison
!!! pas de variables cachées !!!

en 1998 on a raffiné l'expérience et le résultat est sans appel $S > 2$.

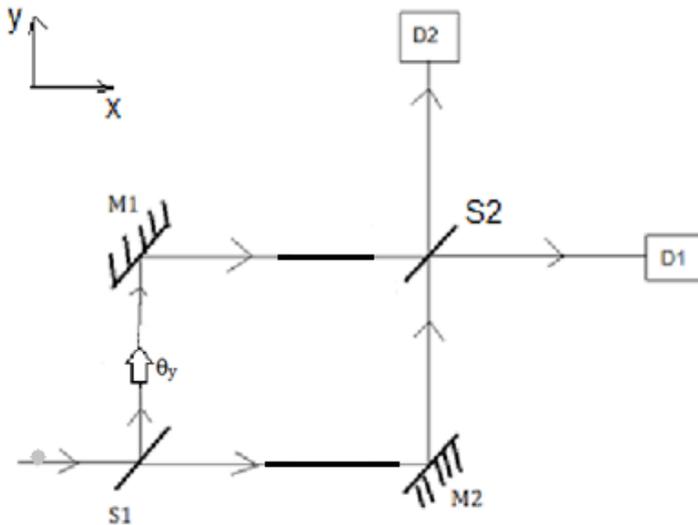
Finalement où est l'erreur dans le raisonnement de EPR ?

C'est dans la localisation des particules ! en effet EPR pense que la particule ξ_1 est localisé en x_1 puis fait une mesure sur ξ_1 qui donne le résultat 1 mais ξ_1 n'existe pas !! il y a simplement un seul système $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$



8.5 FORMALISME DE L'INTERFÉROMÈTRE DE MACH- ZEHNDER

Rappelle l'interféromètre de Mach-Zehnder



→ Lorsque $\theta=0$ le photon va systématiquement en D_1

→ Si $\theta=\frac{\pi}{3}$ le photon va de temps en temps en D_1 , de temps en temps en D_2

→ Lorsque $\theta=\pi$ le photon va systématiquement en D_2

Pour faire des calculs on doit savoir comment les séparateurs S , les miroirs M et le prolongement θ (dans la direction y), sont gérés.

Mathématiquement un séparateur S est décrit par une matrice de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} T & Ri \\ Ri & T \end{pmatrix}; \text{ avec } T^2 + R^2 = 1 \text{ et } T, R \in \mathbb{R}$$

où T=coefficient de transmission, R=coefficient de réflexion

On prend $T=R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ on dit que le séparateur est équilibré.

On a donc :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$S = \begin{cases} |x'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) \\ |y'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|y\rangle + i|x\rangle) \end{cases}$$

ou encore

$$S = \begin{cases} |x\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) \\ |y\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|y\rangle + i|x\rangle) \end{cases}$$

de même pour les miroirs M

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{cases} |x'\rangle = i|y\rangle \\ |y'\rangle = i|x\rangle \end{cases}$$

ou encore

$$M = \begin{cases} |x\rangle \rightarrow i|y\rangle \\ |y\rangle \rightarrow i|x\rangle \end{cases}$$

et pour le rallongement θ_y dans la direction y

$$\theta_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$\theta_y = \begin{cases} |x'\rangle = |x\rangle \\ |y'\rangle = e^{i\theta}|y\rangle \end{cases}$$

ou encore

$$\theta_y = \begin{cases} |x\rangle \rightarrow |x\rangle \\ |y\rangle \rightarrow e^{i\theta}|y\rangle \end{cases}$$

Remarque : Si l'allongement se fait dans la direction x, la matrice de prolongation θ_x serait :

$$\theta_x = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit ξ un photon, ici on s'intéresse seulement à sa direction de propagation, on note $|\xi\rangle$ son état (l'état de la direction de propagation)

Note : Ici on voit qu'un \mathbb{C} -espace vectoriel est nécessaire car si on prend un \mathbb{R} -espace vectoriel, on ne peut pas coder les séparateurs, les miroirs et les rallongements.

Dans le dispositif MZ_θ (Mach-Zehnder, θ =la direction y est rallongée d'une longueur θ) il y a deux états particuliers

$|x\rangle$ = se propager selon x (x =horizontale)

$|y\rangle$ = se propager selon y (y =verticale, $y=x^\perp$)

qui forment une base de l'espace de Hilbert des états de direction de propagation, ainsi tant que le photon ξ n'est pas détecté il est en état de superposition de $|x\rangle$ et de $|y\rangle$

$$|\xi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$$

▫ Le calcul est suivant : On définit l'axe du temps t parallèle à M_1M_2 donc l'ordre du produit des matrices est $SM\theta_yS$ (lire de droite à gauche comme fohok).

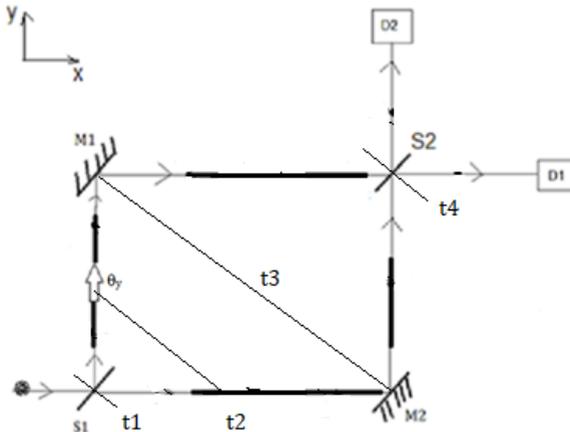


fig8

$$SM\theta_y S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ ie^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - e^{i\theta} & -i + ie^{i\theta} \\ i - ie^{i\theta} & -1 - e^{i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(e^{i\theta} + 1) & i(e^{i\theta} - 1) \\ -i(e^{i\theta} - 1) & -(e^{i\theta} + 1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) & ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}) \\ -ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}) & -e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{2i} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{2i} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{2} \end{pmatrix} \\ Z_\theta = SM\theta_y S &= \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si le photon pénètre dans MZ_θ dans la direction $|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
alors on a :

$$Z_{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

soit:

$$|\xi\rangle = -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |x\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |y\rangle$$

Remarque : on peut virer $e^{i\frac{\theta}{2}}$ car les états $e^{i\frac{\theta}{2}}|x\rangle$ et $|x\rangle$ ont le même état physique ($e^{i\frac{\theta}{2}}|x\rangle = |x\rangle$), donc

$$|\xi\rangle = -\cos \frac{\theta}{2} |x\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |y\rangle$$

et la probabilité d'aller dans D_1 ou D_2 est:

$$\text{prob}(|x\rangle) = \text{prob}(D_1) = |-\cos \frac{\theta}{2}|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

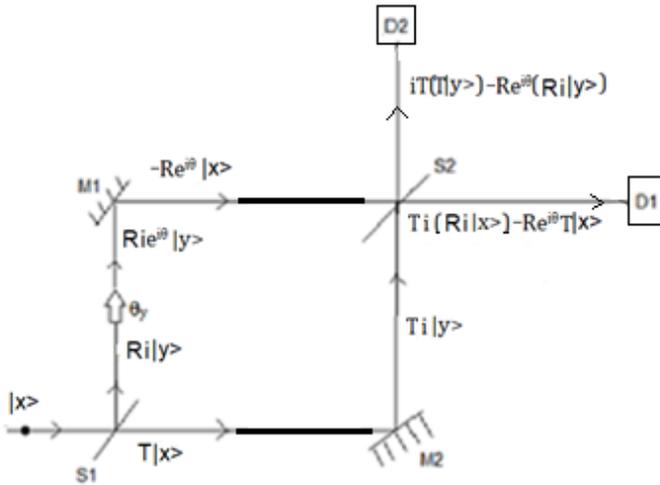
$$\text{prob}(|y\rangle) = \text{prob}(D_2) = |\sin \frac{\theta}{2}|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

Remarque : l'écriture

$$S \begin{pmatrix} |x\rangle \\ |y\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x'\rangle \\ |y'\rangle \end{pmatrix}$$

Montre que le changement de la 1er composante $|x\rangle$ en $|x'\rangle$ et la 2ème composante $|y\rangle$ en $|y'\rangle$ est en même temps, c'est pourquoi l'axe du temps t est parallèle à M_1M_2 .

▣ On peut aussi faire le calcul en complétant les "poids" du graphe ci-dessous



(rappel $T=R=\frac{1}{\sqrt{2}}$) on a:

$$\begin{aligned} iT(Ri|x\rangle) - Re^{i\theta}(T|x\rangle) &= -\left(\frac{e^{i\theta}+1}{2}\right)|x\rangle = -e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\right)|x\rangle \\ &= -e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|x\rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Ti(T|y\rangle) - Re^{i\theta}(Ri|y\rangle) &= -i\left(\frac{e^{i\theta}-1}{2}\right)|y\rangle = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right)|y\rangle \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|y\rangle \end{aligned}$$

$$|\xi\rangle = -e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|x\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|y\rangle$$

On vire $e^{i\frac{\theta}{2}}$, d'où

$$|\xi\rangle = -\cos\frac{\theta}{2}|x\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|y\rangle$$

$$\text{prob}(|x\rangle) = \text{prob}(D_1) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\text{prob}(|y\rangle) = \text{prob}(D_2) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

on trouve bien la même chose.

▣ Le calcul peut se faire aussi en suivant le photon ξ :

$$|x\rangle \xrightarrow{S_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i|y\rangle\right) \xrightarrow{\theta_y} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|y\rangle\right) \xrightarrow{M_1, M_2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i|y\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|x\rangle\right) \xrightarrow{S_2} \frac{1}{\sqrt{2}}i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|y\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i|y\rangle\right)$$

d'où

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|y\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i|y\rangle\right)$$

$$|\xi\rangle = \frac{1}{2}i|y\rangle - \frac{1}{2}|x\rangle - \frac{1}{2}e^{i\theta}|x\rangle - \frac{1}{2}e^{i\theta}i|y\rangle$$

$$|\xi\rangle = -\frac{1}{2}(e^{i\theta} + 1)|x\rangle - \frac{1}{2}i(e^{i\theta} - 1)|y\rangle$$

$$|\xi\rangle = -e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|x\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|y\rangle$$

On vire $e^{i\frac{\theta}{2}}$ car les états $e^{i\frac{\theta}{2}}|x\rangle$ et $|x\rangle$ ont le même état physique ($e^{i\frac{\theta}{2}}|x\rangle = |x\rangle$).

$$|\xi\rangle = -\cos\frac{\theta}{2}|x\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|y\rangle$$

Ici on peut voir que avant d'entrer dans interféromètre le photon est en état $|x\rangle$, dans l'interféromètre le photon est en état de superposition des états $|x\rangle$ et $|y\rangle$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|y\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|y\rangle$$

....

jusqu'à la fin

$$|\xi\rangle = -\cos\frac{\theta}{2}|x\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|y\rangle$$

Tant qu'on ne mesure pas le photon, il reste dans cet état.

Si on le mesure alors on trouve :

$$\text{prob}(|x\rangle) = \text{prob}(D_1) = \left| -\cos\frac{\theta}{2} \right|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\text{prob}(|y\rangle) = \text{prob}(D_2) = \left| \sin\frac{\theta}{2} \right|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

→ Donc si $\theta=0$

$$\text{prob}(D_1) = 1 \text{ et } \text{prob}(D_2) = 0$$

$$\rightarrow \text{si } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\text{prob}(D_1) \neq \text{prob}(D_2)$; tantôt dans D_1 , tantôt dans D_2

$$\rightarrow \text{si } \theta = \pi$$

$\text{prob}(D_1) = 0$ et $\text{prob}(D_2) = 1$

Remarque important :

Le calcul (le formalisme mathématique)

$$\begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

donne les résultats

$$\text{prob}(D_1) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\text{prob}(D_2) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

qui correspondent bien aux expériences, mais ne dit rien sur ce qui se passe réellement à l'intérieur de l'interféromètre MZ_θ c'est-à-dire le comportement du photon à l'intérieur de MZ_θ .

Comment le photon qui prend le chemin $S_1M_2S_2$ sait-il que le chemin $S_1M_1S_2$ a été modifié pour décider d'aller en D_2 , alors qu'il va systématiquement en D_1 (expérience MZ2) ??

En regardant, examinant la matrice Z_θ on ne voit rien ce qui se passe à l'intérieur de MZ_θ . La matrice Z_θ ne répond rien à cette question !!

C'est ici que l'intervient le mot "interprétation"

Quand vous faites de la physique quantique, tôt ou tard vous entendez les expressions :

"interprétation de Copenhague"

"interprétation de Bohm"

"interprétation de Evrette"

"interprétation de Wigner"

etc

Et on se demande tout de suite :

Q1→ Qu'est ce que c'est une interprétation ?

Q2→ Pourquoi faut-il interpréter ?

Q3→ Qu'est ce qu'on interprète exactement ?

Q4→ Pourquoi on n'a pas entendu ce genre d'expression en physique classique ?

etc

Bref tout se tourne dans votre tête

Et aucun livre , aucun article apporte une réponse satisfaisante à ces questions

Parfois c'est du blablabla...., de la philosophie, et encore beaucoup de blablabla

aucune réponse concrète, rien sur la physique quantique elle-même !!!

Pour répondre à ces 4 questions il faut savoir une chose : le concept de "quantité", une quantité est le résultat d'une mesure d'une grandeur physique. Cette quantité est un nombre réel ($\in \mathbb{R}$), notre espace physique ordinaire 3D "contient" des quantités donc les nombres réels.

Par ex on dit

37°C , 12€, 120km/h , 220Vol ...

mais jamais

27i °C , (1+2i)€ , 117i km/h , i Vol

R4→ Il se trouve que le formalisme mathématique en physique classique est réel (on manipule les nombres réels) . Il y a une correspondance entre le résultat mathématique et une signification dans notre monde physique 3D, on n'a pas besoin de l'interprétation, puisqu'il y a une signification dans notre espace physique 3D . par exemple la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

cette matrice peut représenter les prix de deux produits en 1er jour en 2ième jour.

Bien sûr en physique classique on utilise de temps en temps les nombres complexes mais c'est une abréviation, une astuce pour ne pas compliquer les calculs c'est tout, les nombre complexes ne sont pas nécessaire du tout en physique classique on peut très bien s'en passer.

Quand on écrit

$$f(x,t) = Ae^{ikx-\omega t}$$

c'est simplement pour dire

$$f(x,t) = A \cos(kt-\omega t)$$

ou

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

avec $x_0 = ict$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

on peut très bien virer le 'i' et écrit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

c'est tout .

R1 → En physique quantique on travaille dans \mathbb{C} (plus exactement dans l'espace de Hilbert) les résultats des calculs sont des nombres complexes comme la matrice Z_θ

$$Z_\theta = \begin{pmatrix} -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

On ne voit pas la signification de cette matrice dans notre monde physique 3D, donc si on veut savoir ce qui se passe, il faut trouver une explication (à partir de cette matrice) c'est l'interprétation du résultat des calculs.

Donc finalement :

Si on veut des explications, on explique et chacun explique ce qui veut !!

Autrement dit, dans notre cas par exemple, si on veut savoir ce qui passe dans l'interféromètre, on explique à partir de Z_θ , et chacun à son explication !

Il arrive bien sûr que le résultat du calcul a une correspondante avec notre monde physique 3D, c'est le cas par exemple

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \rightarrow$ C'est la polarisation circulaire droite du photon.

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \rightarrow$ C'est la polarisation circulaire gauche du photon.

Mais parfois, très souvent même on ne voit pas la correspondante, donc on interprète le résultat, on explique ce qui se passe comme pour notre matrice Z_θ

en résumé:

Q1 \rightarrow Qu'est ce que c'est l'interprétation ?

R1 \rightarrow L'interprétation c'est simplement une explication de ce qui se passe réellement, physiquement (à partir du

résultat des calculs). Donc chacun interprète ce qui veut !! et personne ne sait de ce qui s'est passé réellement !

Q2→ Pourquoi faut-il interpréter ?

R2→ Tout dépend de la personne, si on veut savoir ce qui se passe on interprète (à partir du résultat dans \mathbb{C}), si non bah ! on n'interprète pas ! on s'est contenté d'avoir le résultat c'est tout.

Par exemple :

Les Positivistes : (Bohr, Heisenberg, Pauli, Hawking, ...) se sont contentés avec les résultats et ne se demandent pas ce qui se passe réellement:

"Je ne demande pas ce qui se passe réellement, je demande simplement des résultats qui correspondent à l'expérience c'est tout, et la physique quantique me fournit des résultats qui correspondent avec les expériences donc je suis content et je m'arrête là"

Contrairement aux

Réalistes : (Einstein, ...) qui demandent absolument ce qui se passe réellement, ils ne se contentaient pas d'avoir seulement des résultats.

Q3→ Qu'est ce qu'on interprète exactement ?

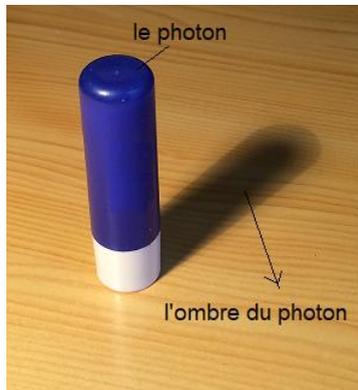
R3→ À chaque fois on a un résultat, ou un objet mathématique qui n'ont pas de correspondant dans l'espace physique 3D (car ils sont de nature complexes), alors on interprète, on donne des explications ... , mais

l'interprétation dépend de nous si on veut ou non ! et chacun interprète comme il veut !

Par exemple : On possède un tableau abstrait, soit on se demande ce que c'est comme image: une maison, un nuage, un lac ...? soit on s'est contenté de posséder ce tableau c'est tout !

Nous allons "interpréter" la matrice Z_0 . Autrement dit on va expliquer ce qui se passe quand le photon pénètre dans l'interféromètre MZ_0 , donc c'est ma interprétation, ma explication.

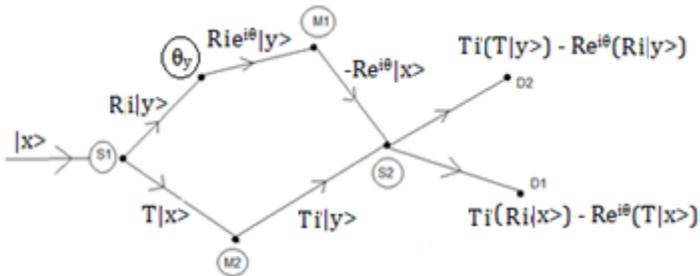
Pour expliquer cela je vais introduire le concept "l'ombre du photon".



l'ombre

Lorsque le photon a un choix entre deux chemins, il en sélectionne un au hasard, et son ombre prend l'autre chemin (s'il y a plusieurs choix on a plusieurs ombres) .

regardons ce graphe ci-dessous



$$\begin{aligned}
 \text{photon} &\rightarrow (|x\rangle) \xrightarrow{S} (T|x\rangle) \xrightarrow{\theta_y} (T|x\rangle) \\
 \text{l'ombre} &\rightarrow (|.\rangle) \xrightarrow{S} (Ri|y\rangle) \xrightarrow{\theta_y} (Rie^{i\theta}|y\rangle) \\
 &\xrightarrow{M} \begin{pmatrix} Ti|y\rangle \\ -Re^{i\theta}|x\rangle \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} -TR|x\rangle - Re^{i\theta}T|x\rangle \\ TTi|y\rangle - Re^{i\theta}Ri|y\rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

→Le photon ξ arrive en S_1 en état $|x\rangle$ et il selecte S_1M_2 (par ex) son état devient $T|x\rangle$ puis il rencontre M_2 son état devient $Ti|y\rangle$, puis il rencontre S_2 son état devient $-TR|x\rangle - Re^{i\theta}T|x\rangle$

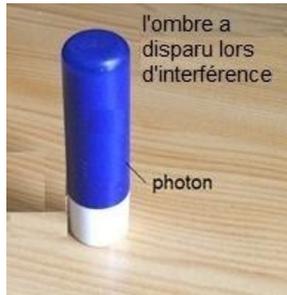
→L'ombre ξ' du photon arrive en S_1 en état $|.\rangle$ (neutre), il prend le chemin S_1M_1 et son état devient $Ri|y\rangle$ puis il rencontre θ_y son état devient $Rie^{i\theta}|y\rangle$ puis il rencontre M_1 son état devient $-Re^{i\theta}|x\rangle$, puis il rencontre S_2 son état devient $TTi|y\rangle - Re^{i\theta}Ri|y\rangle$

En S_2 le photon ξ s'interfère avec son ombre ξ' , on dit que le photon s'auto-interfère, l'ombre ξ' disparaît après cette interférence, il ne reste donc que le photon et tant qu'on ne fait pas de mesure, le photon reste en état de superposition avec $|x\rangle, |y\rangle$

$$(TiRi - Re^{i\theta}T) |x\rangle + (TTi - Re^{i\theta}Ri) |y\rangle$$

$$= -e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |x\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |y\rangle$$

$$|\xi\rangle = -\cos \frac{\theta}{2} |x\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |y\rangle$$



s'auto-interférer \Rightarrow l'ombre disparu

Cette explication permet de voir ce qui se passe à l'intérieur de MZ_θ et obtenir le résultat de l'expérience.

Cette explication permet d'éviter le contradictoire dans l'expression : "la dualité corpusculaire-ondulatoire".

Pour nous une particule quantique est:

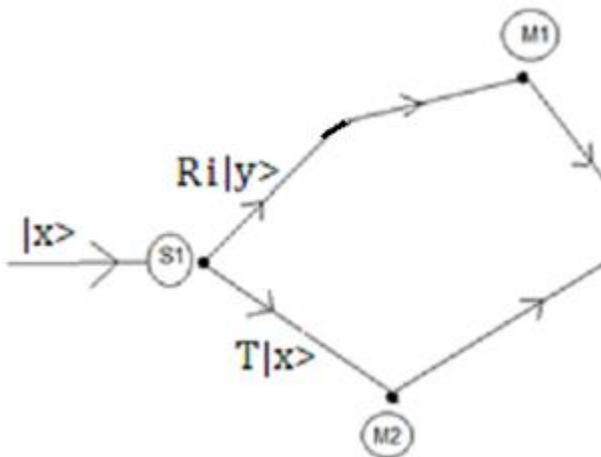
- 1) Corpusculaire (grain de sable)
- 2) Indivisible
- 3) Ayant des propriétés quantiques : spin, s'auto-interférer (peut donner des franges d'interférences).

Model : le photon, l'électron,

8.6 ANALYSE LE DISPOSITIF MZ_θ

Sur cet exemple , si on observe bien ça va nous faire comprendre beaucoup de chose en physique quantique.
En effet voyons

Le photon ξ possède une caractéristique : "la direction de propagation" cette direction ne peut prendre que deux valeurs x (horizontale), y (verticale) on note $|x\rangle$, $|y\rangle$ ces états ayant une valeur bien définie . Arrivant en S_1 (un appareil de mesure de direction), l'état de photon est $|x\rangle$



en sortant de S_1 l'état du photon est:

soit $T|x\rangle$

soit $Ri|y\rangle$

ce qui prouve que S_1 a modifié l'état du photon $|\xi\rangle = |x\rangle$ en

$$|\xi\rangle = T|x\rangle + Ri|y\rangle$$

il y a une interaction entre ξ et S_1 ,

$$|\xi\rangle = T|x\rangle + Ri|y\rangle$$

c'est l'état de superposition de $|x\rangle$ et $|y\rangle$

ici on comprend mieux le principe de superposition, le principe de superposition est donc nécessaire pour expliquer pourquoi à la sortie de S_1 le photon a comme état

soit $T|x\rangle$

soit $Ri|y\rangle$.

Et lorsqu'on mesure la direction de ξ , le résultat sera x ou y .

→Lorsque Bohr dit qu'un objet quantique n'a pas de propriété, il révèle cette propriété seulement quand on la mesure.

→Einstein dit le contraire: bien sûr qu' il a cette propriété, qu'on le mesure ou non !!

Tous les deux ont raison, en fait ça dépend de point de vu.

Voyons pour notre photon ξ il est en état

$$|\xi\rangle = T|x\rangle + Ri|y\rangle$$

Pour Bohr ξ n'a pas de propriété " x " ni " y " car

$$|\xi\rangle \neq |x\rangle \text{ et}$$

$$|\xi\rangle \neq |y\rangle$$

Pour Einstein le photon possède bien la propriété "x" et "y" car on le "voit" dans son état,

$$|\xi\rangle = T|x\rangle + R|y\rangle$$

son état les contient, qu'on mesure ou non le photon.

Pour bien comprendre suivons le scénario suivant:

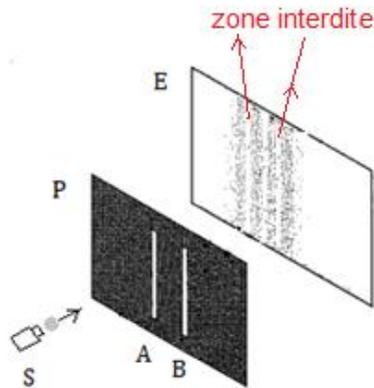
Sur une feuille on a écrit un message secret avec de l'encre invisible.

→ Pour Bohr la feuille n'a pas de message, elle a le message, seulement au moment où l'on met le produit spécial pour rendre l'encre visible.

→ Pour Einstein la feuille possède un message qu'on le rendre visible ou non.

8.7 INTERFÉRENCE QUANTIQUE, FENTES DE YOUNG

L'expérience de fentes de Young avec des particules comme l'électron, le photon



interférence quantique

Mathématiquement ça donne.

Soit $|\psi_A\rangle$ l'état de l'électron qui passe par la fente A, et $|\psi_B\rangle$ l'état de l'électron qui passe par la fente B, et donc l'état de l'électron est

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_A\rangle + |\psi_B\rangle)$$

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|\psi_A\rangle + \langle x|\psi_B\rangle)$$

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}(|\langle x|\psi_A\rangle + \langle x|\psi_B\rangle|^2)$$

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{2}(|\psi_A(x) + \psi_B(x)|^2)$$

$$|\psi|^2 = \frac{1}{2}(|\psi_A|^2 + |\psi_B|^2 + \psi_A\psi_B^* + \psi_B\psi_A^*)$$

$$\neq \frac{1}{2}(|\psi_A|^2 + |\psi_B|^2)$$

Le terme $(\psi_A\psi_B^* + \psi_B\psi_A^*)$ donne l'interférence

Le résultat du calcul

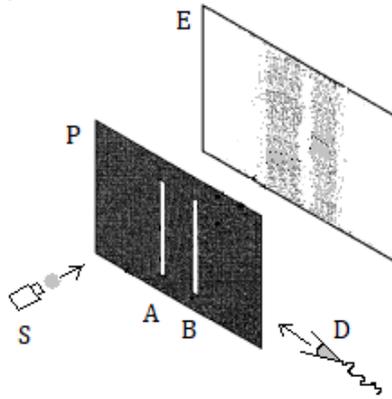
$$|\psi|^2 = \frac{1}{2}(|\psi_A|^2 + |\psi_B|^2 + \psi_A\psi_B^* + \psi_B\psi_A^*)$$

Montre qu'il y a de l'interférence, mais ne montre pas ce qui se passe, donc si on veut savoir ce qui se passe on donne alors des explications (des interprétations) mais chacun a ses propres explications. Ou bien on peut rester là, se contenter du résultat c'est tout.

Voici ma explication (interprétation) comme pour l'interféromètre de Mach Zehnder avec le concept "l'ombre" de la particule.

Quand l'électron a le choix entre deux chemins, il choisit au hasard un chemin et son ombre prend l'autre. Lorsque l'électron et son ombre se rencontrent ils s'interfèrent, on dit que l'électron s'auto-interfère, cet auto-interférence donne les franges d'interférences sur l'écran.

Dans le cas où on observe l'électron pour voir où il passe, alors dans ce cas il n'y a plus d'interférences.



Il n'y a plus d'interférences

Mathématiquement ça donne.

Dans ce cas l'état de l'électron est:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_A\rangle \otimes |D_A\rangle + |\psi_B\rangle \otimes |D_B\rangle)$$

où D est un dispositif qui détecte l'électron en A (D → état $|D_A\rangle$) ou en B (D → état $|D_B\rangle$), et on définit $\{|D_A\rangle, |D_B\rangle\}$ comme une base orthonormée de D. Tant qu'on ne détecte pas l'électron sur l'écran, il reste dans cet état $|\psi\rangle$ ci-dessus, si on le détecte alors son état devient :

$$\begin{cases} |\psi_A\rangle \otimes |D_A\rangle & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ |\psi_B\rangle \otimes |D_B\rangle & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \frac{1}{2} (|\psi_A\rangle \otimes |D_A\rangle + |\psi_B\rangle \otimes |D_B\rangle)^2 \\
&= \frac{1}{2} (\langle\psi_A|\otimes\langle D_A| + \langle\psi_B|\otimes\langle D_B|)(|\psi_A\rangle\otimes|D_A\rangle + |\psi_B\rangle\otimes|D_B\rangle) \\
&= \frac{1}{2} (\langle\psi_A|\psi_A\rangle\langle D_A|D_A\rangle + \langle\psi_A|\psi_B\rangle\langle D_A|D_B\rangle) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\langle\psi_B|\psi_A\rangle\langle D_B|D_A\rangle + \langle\psi_B|\psi_B\rangle\langle D_B|D_B\rangle)
\end{aligned}$$

finalement

$$|\psi|^2 = \frac{1}{2} |\psi_A|^2 + \frac{1}{2} |\psi_B|^2$$

il n'y a plus d'interférences.

Le résultat du calcul montre qu'il n'y a plus d'interférences, mais ne montre pas ce qui se passe, donc si on veut savoir ce qui se passe on donne alors des explications (des interprétations) mais chacun a ses propres explications. Ou bien on peut rester là, se contenter du résultat c'est tout.

Voici ma explication (interprétation)

Quand l'électron a le choix entre deux chemins, il choisit au hasard un chemin et son ombre prend l'autre. Mais l'électron et son ombre intriquent le dispositif D ce qui fait que lorsque l'électron et son ombre se rencontrent ils ne s'interfèrent plus, l'intrication avec D fait que l'électron ne donne plus les franges d'interférences sur l'écran.

9 CRYPTOGRAPHIE ET TÉLÉPORTATION QUANTIQUES

9.1 THÉORÈME DE NON-CLONAGE QUANTIQUE

Ce théorème établi par Wootters, Zurek et Dieks en 1982 dit qu'on ne peut pas copier un état de superposition quantique. Grâce à ce théorème la cryptographie quantique est absolument sur impossible de cracker !!!

Théorème de non clonage : Il est impossible de cloner un état quantique quelconque.

Démonstration

Soit $|\psi\rangle$ un état à cloner et soit $|*\rangle$ un état vierge (qui joue le rôle de la feuille blanche dans une photocopie) , le clonage consiste à transformer l'état $|\psi\rangle \otimes |*\rangle$ en état $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$:

$|\psi\rangle \otimes |*\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$; où le 2ème $|\psi\rangle$ est la copie.

On pourrait faire la même chose avec un autre état $|\Phi\rangle$ c'est-à-dire

$|\Phi\rangle \otimes |*\rangle \rightarrow |\Phi\rangle \otimes |\Phi\rangle$; où le 2ème $|\Phi\rangle$ est la copie.

Mais alors on aura aussi

$$(\alpha|\psi\rangle + \beta|\Phi\rangle) \otimes |*\rangle \rightarrow (\alpha|\psi\rangle + \beta|\Phi\rangle) \otimes (\alpha|\psi\rangle + \beta|\Phi\rangle) = |\chi\rangle$$

Mais la linéarité de la physique quantique dit que

$$\left. \begin{array}{l} \alpha|\psi\rangle \otimes |*\rangle \rightarrow \alpha|\psi\rangle \otimes \alpha|\psi\rangle \\ \beta|\Phi\rangle \otimes |*\rangle \rightarrow \beta|\Phi\rangle \otimes \beta|\Phi\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\alpha|\psi\rangle \otimes |*\rangle) + (\beta|\Phi\rangle \otimes |*\rangle) \\ \rightarrow (\alpha|\psi\rangle \otimes \alpha|\psi\rangle) + (\beta|\Phi\rangle \otimes \beta|\Phi\rangle) \\ = |\zeta\rangle \end{aligned}$$

l'état

$$\begin{aligned} (\alpha|\psi\rangle \otimes \alpha|\psi\rangle) + (\beta|\Phi\rangle \otimes \beta|\Phi\rangle) \\ = \alpha^2|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle + \beta^2|\Phi\rangle \otimes |\Phi\rangle \end{aligned}$$

est différent de

$$\begin{aligned} (\alpha|\psi\rangle + \beta|\Phi\rangle) \otimes (\alpha|\psi\rangle + \beta|\Phi\rangle) = \alpha^2|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle + \\ \alpha\beta|\psi\rangle \otimes |\Phi\rangle + \beta\alpha|\Phi\rangle \otimes |\psi\rangle + \beta^2|\Phi\rangle \otimes |\Phi\rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|\chi\rangle \neq |\zeta\rangle$$

Dans la démonstration on voit qu'on peut cloner un état $|\psi\rangle$ à valeur bien définie " ψ " en effet il suffit de prendre $\alpha=1$ et $\beta=0$ et on aura $|\chi\rangle = |\zeta\rangle$

Dans ce cas si on code le message par une base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ par ex

$$|x\rangle = 1 \text{ et } |y\rangle = 0$$

le message

$$|x\rangle|y\rangle|y\rangle|x\rangle|x\rangle$$

peut être intercepté et cloné , par un espion sans qu'on soit au courant.

par contre si on code le message par des états de superposition comme par ex

$$|\mu\rangle = |x\rangle + |y\rangle$$

$$|\nu\rangle = |x\rangle - |y\rangle$$

et

$$|\mu\rangle=1, |\nu\rangle=0$$

le message

$$|\mu\rangle|\nu\rangle|\nu\rangle|\mu\rangle|\mu\rangle$$

ne peut pas être cloné !!! (donc ça sert à rien d'intercepter!!)

9.2 LA CRYPTOGRAPHIE QUANTIQUE

Le but de la cryptographie est d'envoyer des messages codés que personne ne peut les comprendre si elle ne possède pas la clé de décodage.

Par exemple si Alice envoie le message

"AZKOORETDBNKLKGH"

à Bob, et on ne comprend rien si on a pas la clé de décodage.

Alice doit quand même envoyer la clé à Bob afin qu'il puisse décoder le message, c'est là le problème !! car si quelqu'un intercepte la clé il pourrait décoder le message!

Le problème est donc : comment envoyer la clé en toute sécurité ?

Protocole BB84 (inventeurs Bennett et Brassard 1984)

Le cryptage quantique utilise les qubits pour coder les informations.

Supposons qu'Alice doit envoyer la clé 010 à Bob

et elle dispose de deux bases de codage notées \boxplus et \boxtimes

Pour la base \boxplus , le qubit contient \rightarrow si le bit est 0, il contient \uparrow si le bit est 1, autrement dit

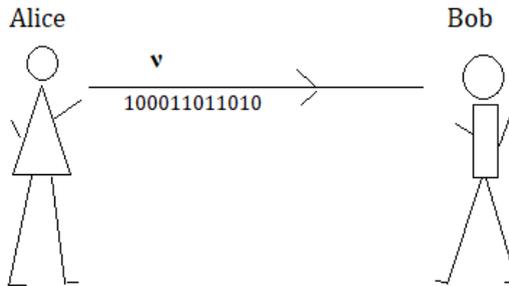
$\boxplus : 0 = \rightarrow, 1 = \uparrow$

de même pour la base \boxtimes

$\boxtimes : 0 = \searrow, 1 = \nearrow$

Sur la fréquence ν (secret, connue seulement par Alice et Bob), Alice va envoyer un signal de longueur 4 fois la longueur de la clé par exemple

signal = 100011011010



1) La transmission

→ Alice choisit au hasard l'une des deux base, code le qubit puis envoie à Bob. Donc seule Alice connaît sa base, et le contenu des qubits.

→ Bob lui aussi choisit au hasard une base puis décode les qubits qu'il reçoit, donc Bob est le seul à connaître sa base.

	bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1 2
Alice	signal	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
	base	⊕	⊗	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕
	qubit envoyé	↑	↘	→	↘	↗	↑	→	↗	↑	→	↗	→
Bob	base	⊗	⊗	⊕	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕
	lu	↘	↘	→	→	↗	↗	→	↑	↑	↗	↑	→

Pour Bob, si la base de Bob est la même que celle d'Alice, le qubit de Bob contient le même bit que le signal, sinon c'est au hasard 0, ou 1, c'est tout ce que Bob sait.

2) Vérification la base de Bob

Comme Bob a choisit au hasard une base, il y 50% de chance d'avoir "bonne" base et 50% mauvaise base donc Alice va vérifier la base de Bob.

Pour ça Alice et Bob comparent leur base (publique: au téléphone par ex à haut voie, tout le monde entend) et ne gardent que les même base : 2,3,5,7,9,12

	bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alice	signal		0	0		1		0		1			0
	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	qubit envoyé		↘	→		↗		→		↑			→
Bob	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	lu		↘	→		↗		→		↑			→

Ici tout le monde sait les n° qubit et la base utilisé:

2⊗,3⊕,5⊗,7⊕,9⊕,12⊕

3) Vérification d'intrus

Cette étape est le cœur du protocole BB84, elle permet de détecter d'intrus en utilisant les propriétés quantiques des particules.

Pour ça Alice choisit au hasard les bits formant la clé (010) bit 2,3,9 et demande à Bob de vérifier les bits restant c'est-à-dire de vérifier les bits 5,7,12. donc tout le monde connaît

$$n^{\circ}5=1, n^{\circ}7=0, n^{\circ}12=0$$

Les bits 5,7,12 se nomment des bits "sacrifiés" car tout le monde connaît maintenant le contenu des qubits 5,7,12.

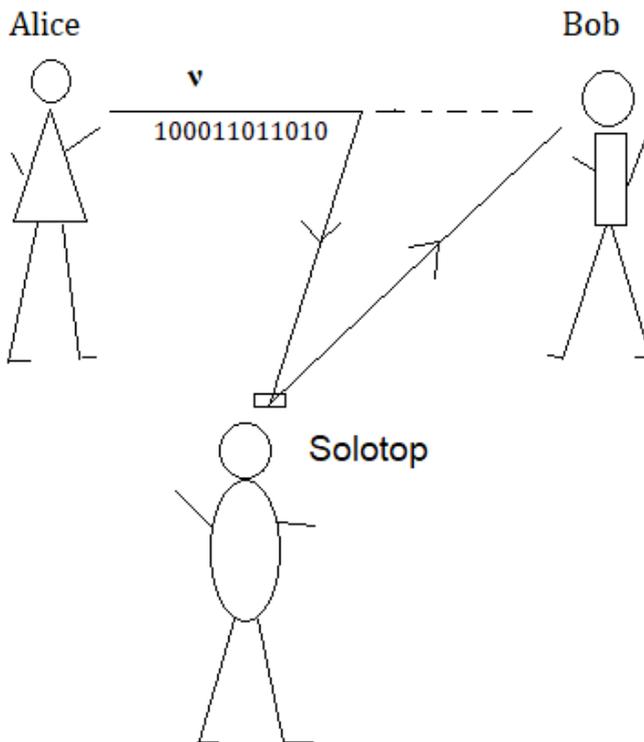
	bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alice	signal		0	0		1		0		1			0
	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	qubit envoyé		↘	→		↗		→		↑			→
Bob	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	lu		↘	→		↗		→		↑			→

Si la vérification est OK pour les bits 5,7,12 alors Alice dit à Bob comment lire la clé dans l'ordre: 3,9,2 c'est-à-dire la clé = 010.

Ici tout le monde sait que les qubits 3,9,2 forment la clé
mais on ne connaît pas le contenu !!!

Espion Solotop

Voyons maintenant le cas où il y a un espion Solotop qui intercepte le signal , le lit puis l'envoie à Bob.



→Solotop lui aussi choisit au hasard une base puis lit les qubits qu'il intercepte, donc Solotop est le seul à connaître sa base.

Une fois lu les qubits il les envoie à Bob. Pour Bob c'est comme si Alice envoie ces qubits.

	bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alice	signal	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
	base	⊕	⊗	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕
	qubit envoyé	↑	↘	→	↘	↗	↑	→	↗	↑	→	↗	→
Solotop	base	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊗	⊗
		↗	↑	→	↘	→	↑	↗	→	↑	↗	↗	↘
Bob	base	⊗	⊗	⊕	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕
	lu	↗	↘	→	→	↘	↘	→	→	↑	↗	↑	↑

Vérification la base de Bob

Comme Bob a choisit au hasard une base, il y a 50% de chance d'avoir "bonne" base et 50% mauvaise base donc Alice va vérifier la base de Bob.

Pour ça Alice et Bob comparent leur base (publique: au téléphone par ex à haut voix, tout le monde entend) et ne gardent que les mêmes bases : 2,3,5,7,9,12

C'est normal qu'on trouve les même bases dans le cas sans espion, puisque Alice et Bob ne touchent pas leur base.

	bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alice	signal		0	0		1		0		1			0
	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	qubit envoyé		↘	→		↗		→		↑	→		→
Solotop	base	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊗	⊗
		↗	↑	→	↘	→	↑	↗	→	↑	↗	↗	↘
Bob	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	lu		↘	→		↘		→		↑			↑

Ici tout le monde sait les n° qubit et la base utilisé:

2⊗,3⊕,5⊗,7⊕,9⊕,12⊕

3) Vérification d'intrus

Cette étape est le cœur du protocole BB84, elle permet de détecter d'intrus en utilisant les propriétés quantiques des

particules. Pour ça Alice choisit au hasard les bits formant la clé (010) bit 2,3,9 et demande à Bob de vérifier les bits restant c'est-à-dire de vérifier les bits 5,7,12. donc tout le monde connaît

Alice : $n^{\circ}5=1$, $n^{\circ}7=0$, $n^{\circ}12=0$

Les bits 5,7,12 se nomment des bits "sacrifiés" car tout le monde connaît maintenant le contenu des qubits 5,7,12.

	bit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alice	signal		0	0		1		0		1			0
	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	qubit envoyé		↘	→		↗		→		↑	→		→
Solotop	base	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊗	⊗
		↗	↑	→	↘	→	↑	↗	→	↑	↗	↗	↘
Bob	base		⊗	⊕		⊗		⊕		⊕			⊕
	lu		↘	→		↘		→		↑			↑

Bob vérifie, ça donne

Bob : $n^{\circ}5=0$, $n^{\circ}7=0$, $n^{\circ}12=1$

il y a deux erreurs : bit 5 et bit 12

Comme il y a des erreurs Alice et Bob déclarent il y a un espion qui intercepte le signal, ils décident de changer la fréquence ν en Λ' et recommencent.

Comme Solotop choisit au hasard la base, il y a 50% d'avoir "mauvaise" base donc 50% d'avoir "erreur" parmi les bits 2,3,5,7,9,12

Finalement le taux d'erreur est de 25% ($1/4$) , dès qu'il y a 25% erreur on peut raisonnablement penser qu'il y a un espion.

Remarque important : S'il n'y avait pas de loi quantique (théorème de non clonage) Solotop intercepte le signal, duplique les qubits et envoie à Bob les origines puis prend le temps d'étudier les copies et ainsi Solotop connaîtrait la clé sans que personne ne s'aperçoit.

Le théorème de non clonage oblige à Solotop de lire les qubits interceptés donc détruits leur contenu ce qui fait que lorsque Solotop envoie les qubits à Bob leur contenu sont différents ceux d'Alice \Rightarrow d'où introduction d'erreurs.

9.3 TÉLÉPORTATION QUANTIQUE

La téléportation quantique est un processus de transfert d'information (de propriété) d'un point x_0 à un point x_1 de l'espace, donc il n'y a pas de transfert de la matière ni de l'énergie mais simplement l'état d'une particule à une autre particule, c'est l'état qui est transféré et non la particule elle-même.

Depuis sa proposition en 1993, la téléportation quantique a été prouvée expérimentalement pour les photons (polarisation), électron (spin), le dernier record de distance est de 143 km en 2012.

Pour ne pas alourdir les écritures on écrit simplement:

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = |uv\rangle = |u\rangle |v\rangle .$$

Avant de commencer le protocole de la téléportation on va définir les 4 états $|\psi_{+}\rangle$, $|\psi_{-}\rangle$, $|\Phi_{+}\rangle$, $|\Phi_{-}\rangle$, nommés états de Bell :

Par définition:

$$|\psi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) , |\Phi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) , |\Phi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

ces états forment une base de l'espace des états de deux qubits.

et la base standard en fonction des $|\psi\rangle$ et des $|\Phi\rangle$ vaut :

$$|00\rangle = \frac{\sqrt{2}|\psi_{+}\rangle + \sqrt{2}|\psi_{-}\rangle}{2}$$

$$|11\rangle = \frac{\sqrt{2}|\psi_{+}\rangle - \sqrt{2}|\psi_{-}\rangle}{2}$$

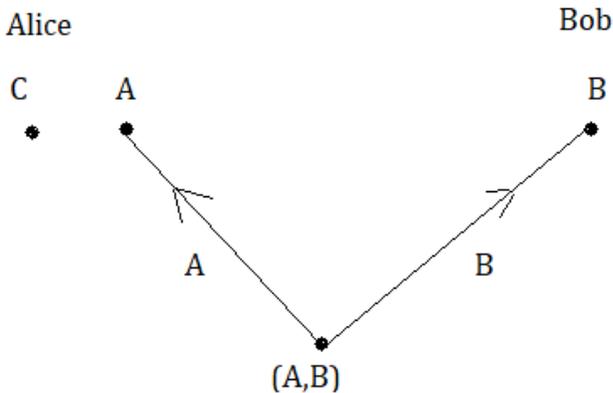
$$|01\rangle = \frac{\sqrt{2}|\Phi_{+}\rangle + \sqrt{2}|\Phi_{-}\rangle}{2}$$

$$|10\rangle = \frac{\sqrt{2}|\Phi_{+}\rangle - \sqrt{2}|\Phi_{-}\rangle}{2}$$

Alice possède une particule C dont l'état est

$|C\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ que Alice ignore cet état.

Elle veut téléporter cet état vers Bob.



Protocole de la téléportation

1) On crée une paire de particules intriquées (A,B) d'état:

$$|(A,B)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

2) On envoie (voie classique) la particule A à Alice et la particule B à Bob, C'est l'état de C qui sera téléporté à B.

3) Alice fait interagir la particule C sur la particule A, en fait elle forme une paire (C,A) intriquée, donc l'état de A change et on perd l'état de C.

4) La paire (A,B) est maintenant nouvellement intriquée !

- 5) Alice mesure la paire (C,A)
- 6) Alice donne (voie classique) le résultat de la mesure à Bob.
- 7) Une fois connaître le résultat de la mesure, Bob effectue une transformation adéquate sur la particule B, la particule B possède maintenant l'état initial de C (C a perdu son état initial) .

Voyons tout ça en calcul.

On a deux systèmes : la particule C et la paire intriquée (A,B) le système total est C U (A,B) qu'on note simplement C(A,B), l'état du système total est

$$\begin{aligned}
 |C(A,B)\rangle &= |C\rangle |(A,B)\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) \\
 (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) &= \alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle \\
 &= |00\rangle \alpha|0\rangle + |01\rangle \alpha|1\rangle + |10\rangle \beta|0\rangle + |11\rangle \beta|1\rangle \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}|\psi_{+}\rangle + \sqrt{2}|\psi_{-}\rangle}{2}\right) \alpha|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{2}|\phi_{+}\rangle + \sqrt{2}|\phi_{-}\rangle}{2}\right) \alpha|1\rangle \\
 &\quad + \left(\frac{\sqrt{2}|\phi_{+}\rangle - \sqrt{2}|\phi_{-}\rangle}{2}\right) \beta|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{2}|\psi_{+}\rangle - \sqrt{2}|\psi_{-}\rangle}{2}\right) \beta|1\rangle
 \end{aligned}$$

d'où

$$|(C,A)B\rangle = \frac{|\psi_{+}\rangle}{2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \frac{|\psi_{-}\rangle}{2} (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)$$

$$\frac{|\Phi_{+}\rangle}{2} (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + \frac{|\Phi_{-}\rangle}{2} (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)$$

On a perdu l'état initial de C, mais on a la paire (C,A) intriquée donc la paire (A,B) est intriquée de nouveau.

Si on pose

$$\mu_{+} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$\mu_{-} = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

$$\nu_{+} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

$$\nu_{-} = -\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

Lorsqu'Alice mesure la paire (C,A) elle tombe sur l'un des quatre états $|\psi_{+\mu_{+}}\rangle, |\psi_{-\mu_{-}}\rangle, |\Phi_{+\nu_{+}}\rangle, |\Phi_{-\nu_{-}}\rangle$ avec la même probabilité $1/4$

$$\text{prob}(|\psi_{+\mu_{+}}\rangle) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Une fois connaître le résultat de la mesure Alice dit à Bob (voie classique) comment faire pour transformer l'état de B

$$|\Phi_{+\nu_{+}}\rangle \rightarrow \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_{-\mu_{-}}\rangle \rightarrow \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\Phi_{-\nu_{-}}\rangle \rightarrow \sigma_z \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|\psi_{+\mu_+} \rangle \rightarrow$ rien à faire

Résultat	Opération	Bob doit faire
$ \Phi_{+v_+} \rangle$	$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \rangle$
$ \psi_{-\mu_-} \rangle$	$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B \rangle$
$ \Phi_{-v_-} \rangle$	$\sigma_z \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B \rangle$
$ \psi_{+\mu_+} \rangle$	rien à faire	$ B \rangle$

Si vous voulez vraiment voir ce qui se passe, il suffit d'indexer les particules dans le calcul.

Recommençons le calcul avec les indices.

$$|C(A,B)\rangle = |C\rangle |(A,B)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C) (|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})$$

$$(\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C) (|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}) = \alpha|000\rangle_{CAB} + \alpha|011\rangle_{CAB} \\ + \beta|100\rangle_{CAB} + \beta|111\rangle_{CAB}$$

La particule C interagit sur A, ça donne

$$= |00\rangle_{CA} \alpha|0\rangle_B + |01\rangle_{CA} \alpha|1\rangle_B + |10\rangle_{CA} \beta|0\rangle_B + |11\rangle_{CA} \\ \beta|1\rangle_B$$

on perd l'état de C, mais on a une paire (C,A) intriquée

$$= \left(\frac{\sqrt{2}|\psi_{+>} + \sqrt{2}|\psi_{->}}{2} \right)_{CA} \alpha|0>_B + \left(\frac{\sqrt{2}|\Phi_{+>} + \sqrt{2}|\Phi_{->}}{2} \right)_{CA} \alpha|1>_B \\ + \left(\frac{\sqrt{2}|\Phi_{+>} - \sqrt{2}|\Phi_{->}}{2} \right)_{CA} \beta|0>_B + \left(\frac{\sqrt{2}|\psi_{+>} - \sqrt{2}|\psi_{->}}{2} \right)_{CA} \beta|1>_B$$

d'où

$$|(C,A)> = \frac{|\psi_{+>CA}}{2} (\alpha|0>_B + \beta|1>_B) + \frac{|\psi_{->CA}}{2} (\alpha|0>_B - \beta|1>_B) \\ \frac{|\Phi_{+>CA}}{2} (\beta|0>_B + \alpha|1>_B) + \frac{|\Phi_{->CA}}{2} (-\beta|0>_B + \alpha|1>_B)$$

Si on pose

$$\mu_+ = \alpha|0> + \beta|1>$$

$$\mu_- = \alpha|0> - \beta|1>$$

$$\nu_+ = \beta|0> + \alpha|1>$$

$$\nu_- = -\beta|0> + \alpha|1>$$

Lorsque la particule C interagit avec A on a une nouvelle paire (C,A) intriquée (superposition des états intriqués)

$$|(C,A)> = \frac{1}{2}|\psi_{+\mu_+>} + \frac{1}{2}|\psi_{-\mu_->} + \frac{1}{2}|\Phi_{+\nu_+>} + \frac{1}{2}|\Phi_{-\nu_->}$$

Lorsqu'Alice fait une mesure sur A (plus exactement sur la paire (C,A)) elle tombe aléatoirement sur l'un de ces quatre états avec la probabilité 1/4, par ex elle tombe sur :

$$|\psi_{-\mu_->}$$

et la particule B prend immédiatement l'état μ_- puisque (A,B) est intriqué

$$|B\rangle = \mu = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

qui n'est pas tout à fait l'état initial de C, il faut qu'Alice dit à Bob le résultat de la mesure $|\psi \cdot \mu\rangle$ ainsi Bob transforme $|B\rangle$ par σ_z pour avoir l'état initial de C.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} |B\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Note : La téléportation ne contredit pas le théorème de non-clonage car C a perdu son état initial, seule la particule B possède l'état $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ pas C.

9.4 NOTATION

\underline{X} = grandeur physique (coordonné)

x = valeur (nombre réel) que peut prendre \underline{X}

\hat{X} = observable associé à \underline{X} (\hat{X} opérateur dans \mathcal{H})

X = opérateur dans $L^2(\mathbb{R})$

\underline{P}_x = grandeur impulsion suivant x

p = valeur (nombre réel) que peut prendre \underline{P}_x

\hat{P}_x = observable associé à \underline{P}_x (\hat{P}_x dans \mathcal{H} , l'espace Hilbert des états)

$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ = opérateur dans $L^2(\mathbb{R})$

$\underline{R} = \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \\ \underline{Z} \end{pmatrix}$ grandeur coordonnée (vectoriel, pour 3D)

$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}$ observable vectoriel associé à \underline{R}

$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vecteur coordonné (pour 3D ; x,y,z réels)

9.5 LES CONSTANTES

Constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{Js}$; $\hbar = h/2\pi$

Charge élémentaire $q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{C}$

Masse de l'électron $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{kg}$

Masse du proton $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$

Masse du neutron $m_n = 1,68 \cdot 10^{-27} \text{kg}$

TABLE DES MATIÈRES

1	L'étrangeté des objets quantiques.....	1
1.1	L'expérience des fentes de Young.....	1
1.2	L'interféromètre de Mach Zehnder	4
2	L'Espace de Hilbert.....	10
2.1	L'espace de Hilbert.....	10
2.2	L'opérateur adjoint	15
2.3	Produit tensoriel de deux espaces de Hilbert ...	19
2.4	Notation de Dirac ket et bra.....	22
2.5	Opérations sur les kets et les bras	23
3	Les distributions et Les polynômes orthogonaux	25
3.1	Les fonctions à support fermé-borné.....	25
3.2	Une suite de fonctions intéressantes.....	29
3.3	Distribution de Dirac.....	33
3.4	Polynômes orthogonaux.....	40
3.5	Polynôme d'Hermite.....	44
3.6	Polynôme de Laguerre.....	51
3.7	Quelques intégrales connues.....	57
4	Le formalisme de la physique quantique.....	59
4.1	La rencontre du premier type.....	59
4.2	L'espace des états.....	63
4.3	Le postulat de la mesure.....	65

4.4	Valeur moyenne de G	70
5	Polarisation	75
5.1	Polarisation de la lumière	75
5.2	Polarisation d'un photon	80
6	L'expérience de Stern-Gerlach.....	87
6.1	Moment magnétique, moment cinétique orbital 87	
6.2	Voyons les matrices de μ_x , μ_y , μ_z	103
6.3	Le spin $1/2$	113
6.4	Rotation dans \mathbb{R}^3 et le spin	120
7	Le qubit	123
7.1	La sphère de Bloch.....	124
8	Le paradoxe EPR et l'inégalité de Bell.....	132
8.1	L'aléatoire	132
8.2	Le paradoxe EPR.....	134
8.3	Une corrélation parfait	142
8.4	Une inégalité de Bell	144
8.5	Formalisme de l'interféromètre de Mach- Zehnder	150
8.6	Analyse le dispositif MZ_θ	168
8.7	Interférence quantique, fentes de Young	170
9	Cryptographie et téléportation quantiques.....	175
9.1	Théorème de non-clonage quantique	175
9.2	La cryptographie quantique	177

9.3	Téléportation quantique.....	186
9.4	Notation	194
9.5	Les constantes	195

Du même auteur

⌘1 *La conjecture de Fermat*

C'est un livre qui démontre la conjecture de Fermat, (appelé souvent "le dernier théorème de Fermat") en s'appuyant sur deux théorèmes: le théorème de Ribet et le théorème de Wiles. Un document rare et exceptionnel.

© Juin-2015, Morphocode CODE

⌘2 *La Relativité Générale*

Tout sur la Relativité Générale et on trouve une démonstration de l'équation tensorielle d'Einstein à partir du principe moindre action, ce qui est très rare.

© Décembre-2016, Morphocode CODE

⌘3 *Le Groupe du Rubik's Cube (Tome I, II)*

Le Rubik's Cube possède un groupe très riche en propriétés et si la partie mathématique du puzzle vous intéresse alors ce livre est pour vous.

© Mars-2017, Morphocode CODE

⌘4 *La Relativité Restreinte*

La Relativité Restreinte est une théorie physique proposée par Einstein pour remplacer la mécanique newtonienne quand la vitesse des objets est proche à celle de la lumière c .

© Novembre-2017, Morphocode CODE

▣5 *Les nombres transcendants*

Les nombres transcendants sont très mystérieux, ils sont partout, beaucoup plus nombreux que les nombres algébriques et pour tant on connaît très peu de ces nombres, le premier est e , puis π , $\cos(1)$, ...

© Novembre-2017, Morphocode CODE

▣6 *Les twists et les maths*

Pour comprendre les propriétés des twists il faut passer par les mathématiques, à chaque twist on associe un groupe et ce sont des propriétés de ce groupe qui expliquent les propriétés du twist.

© Mars-2018, Morphocode CODE

▣7 *La physique quantique (Tome I, II)*

Si vous voulez savoir ce que c'est la physique quantique , ce livre est pour vous.

© Sept-2018, Morphocode CODE

